

O Guia Completo Para Quem

N? ? o ? ?

C.D.F - Pr ? ? -

W. Michael Kelley

VISIT...

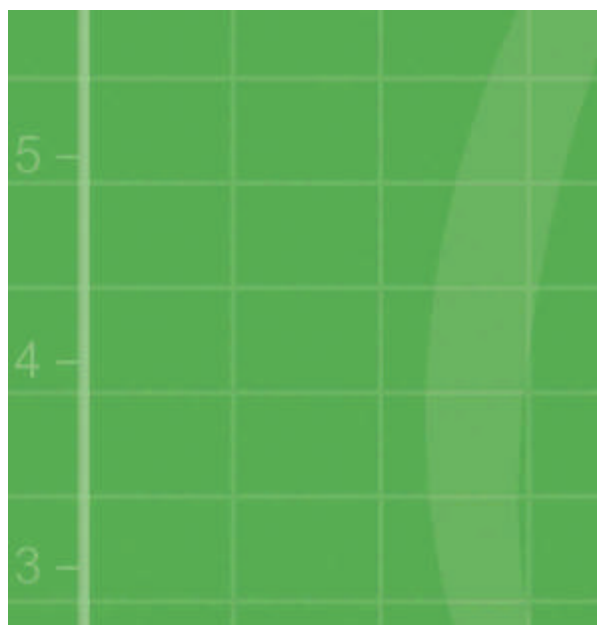
LANZAROTE
Caliente.COM

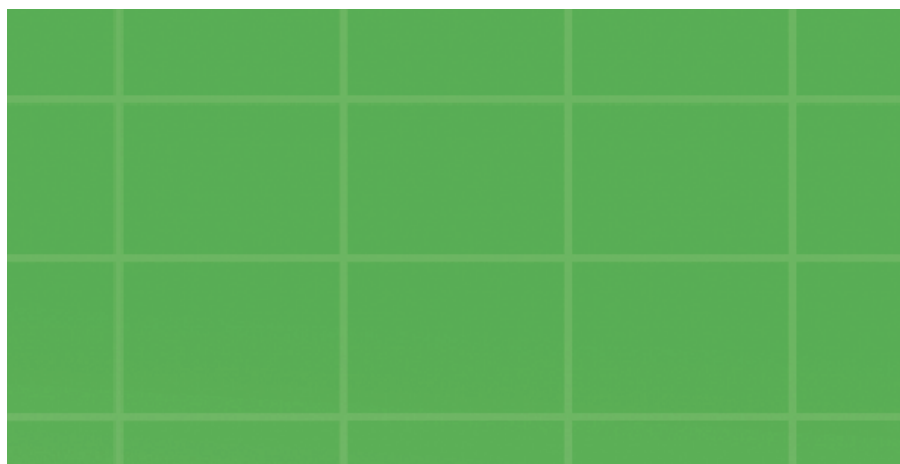
O Guia Completo Para Quem

Não

C.D.F - Pr-

W. Michael Kelley

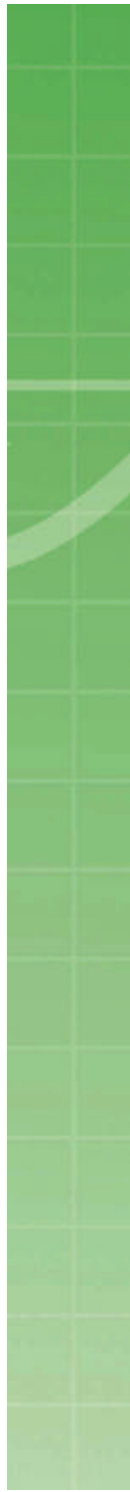


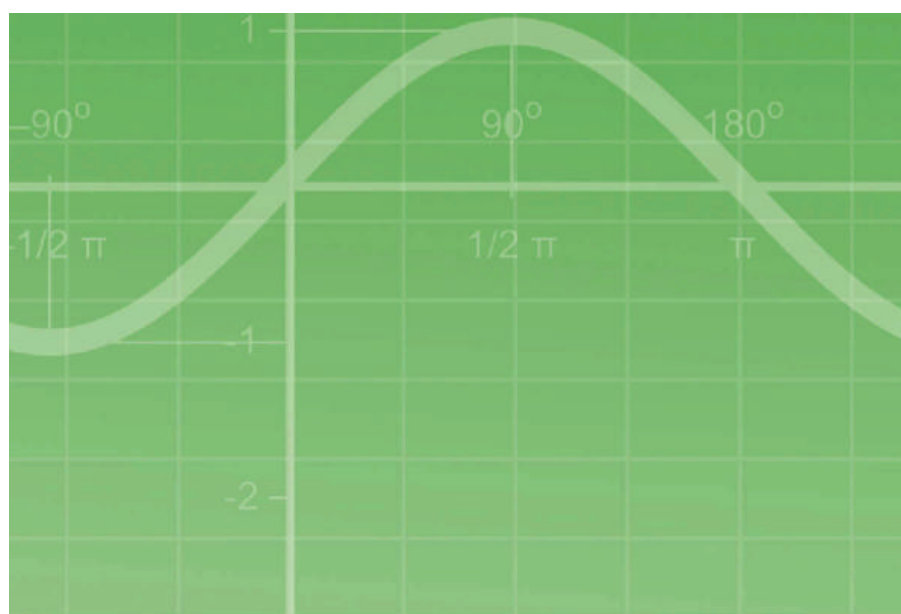


180°

$-\pi$



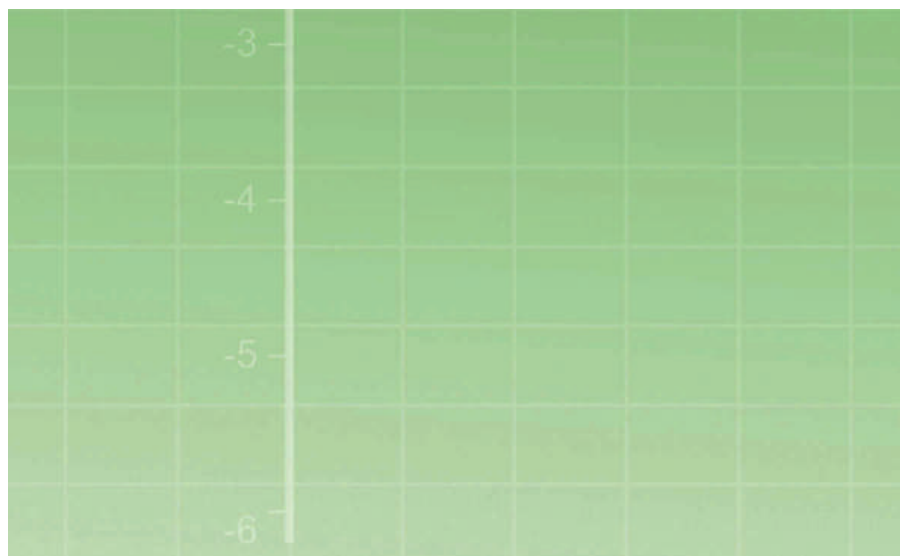




270°

+

$\frac{3}{2} \pi$



**A SÉRIE PARA
QUEM NÃO É
CABEÇA DE FERRO!**

O Guia
para
Cursos

Completo
Não É

4 -

Quem
C







O Guia Completo para Quem Não É C.D.F

Ciências exatas

Do mesmo autor de O

Sua “posição padrão” na

Guia Completo para

Quem Não é C.D

matemática é a posição fetal?

Cálculo e Álgebra.F

Você é inteligente, é claro. Pelo menos nunca havia se questionado quanto a isso, até descobrir o pré-cálculo.

Agora, as equações estão ficando mais difíceis, há essa coisa denominada trigonometria que você não consegue especificar muito bem o que é, e sempre que

alguém diz “hipérbole”, fica com tique nervoso.

Domine sua ansiedade

A ajuda está a caminho! Se você se sente pronto, ou já
matemática e aprenda a...

está perdido e sem esperanças na aula de pré-cálculo,
este livro lhe oferece não apenas a prática necessária,

◆ Determinar as raízes de funções

mas também explicações abrangentes em bom
complicadas.

português! Com *O Guia Completo Para Quem Não É*
C.D.F. – Pré-cálculo, você obtém:

◆ Investigar funções

logarítmicas e exponenciais.

◆ Uma rápida atualização no básico da álgebra.

◆ Resolver equações

◆ Mais técnicas de álgebra avançada do que se

trigonométricas e provar suas

pode mencionar, desde a resolução de equações

Pré-cálculo

identidades.

básicas a elipses gráficas.

◆ Dominar as seções cônicas.

Fundamentos do pré-cálculo

◆ Todas as habilidades trigonométricas que

♦ Executar operações com

você precisará desenvolver para ter êxito na

até para quem não é C.D.F.

matrizes.

matemática avançada.

♦ Resolver sistemas de equações

♦ Instruções detalhadas sobre como usar matrizes

usando a forma escalonada

.

para simplificar sua vida matemática.

reduzida por linhas de uma matriz.

♦ Um capítulo especialmente voltado para a

Pré-cálculo

prática, ajudando você a refinar suas habilidades.

W. Michael Kelley é um professor de

cálculo contemplado com prêmio e autor

x

y

de seis livros de matemática, entre eles *O*

Guia Completo Para Quem Não É C.D.F.

– *Cálculo e O Guia Completo Para Quem Não É*

C.D.F. – Álgebra. Kelley foi premiado pelo Conselho

de Professores de Matemática da Universidade de

Maryland, sendo reconhecido como um professor de

da 2ª Edição

matemática notável, além de ter sido nomeado “o

Tradução

professor mais popular” por quatro anos consecutivos

em sua escola. Também foi fundador e é o editor do

site calculus-help.com.

ISBN 978-85-7608-823-3

/altabooks

W. Michael Kelley

/alta_books

www.altabooks.com.br

CDF_Precalculus.indd 1

22/05/2014 14:02:22

A handwritten signature in dark ink, reading "W. Michael Kelley". The signature is fluid and cursive, with a long horizontal stroke extending to the right.

Caro leitor,

Sobre o autor

Se eu fosse um apostador (e sou), apostaria que neste momento você se encontra W. Michael Kelley é professor de matemática (e fã de matemática) e tem um bastante tenso. Não são muitos os motivos que levam uma pessoa a pegar e abrir um jeito de ensinar elogiado por organizações como o *Maryland Council of Teachers* livro de pré-cálculo. Não, não são muitas as situações que demandam uma medida *of Mathematics* (Conselho de Maryland de Professores de Matemática que o tão extrema.

reconheceu como Professor Notório de Matemática para o Ensino Médio) e a Talvez você faça parte de uma turma de pré-cálculo e esteja começando a se sentir companhia elétrica a poucas quadras da

casa dele, que o homenageou com um pouco perdido, com a impressão de que, se não tomar uma atitude em breve, uma placa e um buffet (com cenouras baby) em sua honra.

poderá deixar de se sentir “um pouco confuso” para passar a “não fazer a mínima ideia” do que está acontecendo. Esta sensação de estar à beira do precipício, entre Mike obteve seu diploma no *St. Mary's College* de Maryland em 1994 com dois a esperança e o desespero, é mentalmente exaustiva. Ainda assim, tudo o que você objetivos principais em mente: ajudar as pessoas a entenderem matemática precisa é de um empurrãozinho na direção certa para voltar a sentir o chão firme (por mais doido que isso possa parecer) e tirar do trono Takeru “O Tsunami”

sob seus pés.

Kobayashi em seu título de campeão como maior comedor de cachorros-Talvez a situação seja ainda pior. Se você olhar com atenção para aqueles dias em que

-quentes do mundo. Ainda assim, quando ele descobriu que a competição não tinha certeza se entendia (porque agora você sabe sem sombra de dúvida que tinha como único foco a *rapidez* com que os cachorros-quentes são comidos, não entende mais o que está acontecendo), verá que ainda não está condenado. Este não no quanto é *delicioso* comê-los, ele decidiu focar exclusivamente no livro permite que você comece do início e caminhe de acordo com seu próprio passo.

objetivo matemático.

Em pouco tempo você retomará o ritmo e terá uma boa base sobre a qual se apoiar até o restante do curso.

Mike escreveu cinco outros livros, incluindo o grande sucesso *O Guia Completo Para Quem Não é C.D.F. – Cálculo* e *O Guia Completo Para Quem Não é C.D.F. – Álgebra*.

Não importa onde você se encontra dentro do espectro de respostas para a pergunta Ele também é o fundador e editor do site www.calculus-help.com (em inglês)

“Por que esta aula está acabando comigo?”, eu escrevi este livro especialmente para que ajuda milhões de estudantes a dominarem suas ansiedades matemáticas.

você. Não é um livro-texto. Em vez de 30 problemas por seção (sem explicações), faço uso de 5 ou 10 bons exemplos e explico cada passo necessário para que a solução seja De fato, se você gostar deste livro, vá até o site dele e envie um e-mail para alcançada. Afinal de contas, você já tem um livro-texto, e, se eu fosse um jogador dizer isso.

(sei que já considerarei essa hipótese), apostaria que a leitura daquele livro é algo tão Mike vive em Maryland com sua esposa, Lisa, seu filho Nicholas, suas filhas divertido quanto tacar fogo em si mesmo.

gêmeas Erin e Sara e o gato Peanut (que nunca ganhou cenouras como O livro que você tem em mãos não é como aqueles manuais chatos de matemática prêmio, sejam elas baby ou não).

que destroem a alma. Eu realmente quero que você compreenda cada tópico de cada capítulo, de modo que nenhum detalhe fique a cargo da imaginação. Acho que você entende o que quero dizer, nada daquelas bobagens de “De onde saiu este passo?”

que cansam tão rapidamente. De fato, espero que você, durante o percurso, dê algumas risadas de minhas piadas ou de mim (porque eu ainda tenho a ingenuidade de acreditar que anedotas matemáticas são divertidas).

Admitir que você precisa de ajuda é o primeiro (e mais difícil) passo, e você já deu.

O segundo passo é encontrar um bom recurso de ajuda (e agora você já encontrou).

Então, neste momento, resta dedicar certo tempo ao estudo, ter algumas folhas de rascunho à mão, um pouco de ambição e talvez um macaco de estimação vestindo smoking (para entretenimento durante os intervalos de estudo). Desse modo, você estará a caminho de dominar o pré-cálculo. Eu aposto nisso.

W. Michael Kelley.

CDF_Precalculus.indd 2

22/05/2014 14:02:22

O Guia

a Completo





Pré-Cálculo

por W. Michael Kelley

Rio de Janeiro, 2014

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 1

22/05/2014 14:49:50

O Guia Completo para Quem Não É C.D.F. — Pré-Cálculo
Copyright © 2013 da Starlin Alta Editora e Consultoria Eireli.

ISBN: 978-85-7608-823-3

Translated from original The Complete Idiot's Guide to Pre-Calculus © 2005 by W. Michael Kelley, Inc. ISBN 978-1-59257-301-1 . This translation is published and sold by permission Penguin Group, the owner of all rights to publish and sell the same. PORTUGUESE language edition published by Starlin Alta Editora e Consultoria Eireli, Copyright © 2014 by Starlin Alta Editora e Consultoria Eireli.

Todos os direitos reservados e protegidos por Lei. Nenhuma parte deste livro, sem autorização prévia por escrito da editora, poderá ser reproduzida ou transmitida.

Erratas: No site da editora relatamos, com a devida correção, qualquer erro encontrado em nossos livros. Procure pelo título do livro.

Marcas Registradas: Todos os termos mencionados e reconhecidos como Marca Registrada e/ou Comercial são de responsabilidade de seus proprietários. A Editora informa não estar associada a nenhum produto e/ou fornecedor apresentado no livro.

Impresso no Brasil — 1ª Edição, 2014

Vedada, nos termos da lei, a reprodução total ou parcial deste livro.

Produção Editorial

Supervisão Gráfica

Conselho de

Design Editorial

Marketing e Promoção

Editora Alta Books

Angel Cabeza

Qualidade Editorial

Auleriano Messias

marketing@altabooks.com.br

Anderson Vieira

Marco Aurélio Silva

Gerência Editorial

Supervisão de

Angel Cabeza

Anderson Vieira

Qualidade Editorial

Jaciara Lima

Sergio Luiz de Souza

Editoria de Séries

Sergio Luiz de Souza

Claudia Braga

Supervisão de Texto

Jaciara Lima

Cristiane Santos

Evellyn Pacheco

Marcelo Vieira

Thiê Alves

Daniel Siqueira

Hannah Carriello

Milena Souza

Equipe Editorial

Elaine Mendonça

Livia Brazil

Natália Gonçalves



XX

XX

XXXXXXXXXX XXXXXXXXXXXX XX XXXXXXXXXXXX XX XXXXXXXXXXXX XXXX
XXXXXXXXXXXX XX XXXXXXXXXXXXXXX XXXX

XX

XX

XX

XX

XX

X

X

XX

XXX XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

XXX XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

X

XX

XX

Rua Viúva Cláudio, 291 – Bairro Industrial do Jacaré

CEP: 20970-031 – Rio de Janeiro – Tels.: (21) 3278-8069/8419

www.altabooks.com.br – e-mail: altabooks@altabooks.com.br

www.facebook.com/altabooks – www.twitter.com/alta_books

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 2

22/05/2014 14:49:51

Sumário Resumido

Parte 1:

Requisitos Prioritários do Pré – cálculo

1

1

Revisando Números e Aritmética

3

Seria mais divertido se eu usasse as palavras númerrir e

aritmtruques? Provavelmente não – aprender regras e leis numéricas não é muito divertido, mas pelo menos não é difícil.

2

Equações e Desigualdades

15

Embora alguns sejam, nem todos os problemas matemáticos são iguais; aprenda a encontrar soluções mesmo assim.

3

Praticando com Polinômios

29

Você encontrará mais polinômios neste livro do que sua caneta é capaz de resolver (ou canetas, já que muitas serão usadas). Então, é melhor revisar o assunto (e, por favor, pare de balançar essa caneta, você vai ferir seu olho desse jeito).

4

Fatoração de Polinômios

43

Assim como as rapaduras das festas juninas, os polinômios são mais saborosos em pedaços embalados individualmente e que cabem em uma só mordida.

5

Expressões Racionais e Desigualdades Estranhas

Era só uma questão de tempo até as frações entrarem em cena, como um pavão exibindo sua penugem. Aprenda tudo o que

precisa para domar essas belas feras!

Funções 69

As funções vão aterrorizá-lo pelo resto da vida. Então, a menos que você encare seus medos agora, acabará dormindo com as luzes acesas pelo resto de sua carreira matemática.

Parte 2:

Equações e Funções Não Lineares

Funções e Equações Elevadas a Altas Potências

As funções e equações diplomadas no mais alto grau acham que são expertas. Coloque-as em seus devidos lugares.

Rua Viúva Cláudio, 291 – Bairro Industrial do Jacaré

CEP: 20970-031 – Rio de Janeiro – Tels.: (21) 3278-8069/8419

www.altabooks.com.br – e-mail: altabooks@altabooks.com.br

www.facebook.com/altabooks – www.twitter.com/alta_books

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 3

22/05/2014 14:49:51

O Guia Completo para Quem Não é C.D.F. - Pré-Cálculo

Funções Logarítmicas

101

A lenha usada na matemática não tem nenhum impacto no meio ambiente (mas você também não tem passe livre para usá-la como se tivesse ganhado um ingresso para fazer tudo o que quisesse no parque de diversões).

9

Funções Exponenciais

113

Funções que crescem mais rápido que bolor no pão, que você cultivou para seu projeto de ciências da sétima série.

Parte 3:

Trigonometria

127

10

Sendo Dobrado pelos Ângulos

129

Abandone o mundo bobo das funções para um breve descanso no mundo de belos contornos da geometria.

11

Representando Graficamente Funções Trigonométricas

145

Foi bom não pensar em funções durante cinco minutos, mas agora elas estão de volta e são periódicas (com isso quero dizer que estão

“de volta para uma vingança”).

12

Identidades Trigonométricas

159

É como ser um investigador de cena de crime, mas sem o crime e sem a cena, e com funções trigonométricas em vez de um cadáver.

13

Resolvendo Equações Trigonométricas

171

Equações com respostas que contêm π ? Parece ótimo!

14

Teoremas do Triângulo Oblíquo

183

Se galinhas criadas livres produzem carnes mais especiais, então os triângulos criados livres podem ser especiais o bastante para assistir Jô Soares ao seu lado e dar um grande abraço em você, "simplesmente por você existir".

Parte 4:

Seções Cônicas

201

15

Parábolas e Circunferências

203

Duas formas que você conhece e ama são muito mais complexas do que você jamais imaginou. Sente-se para tomar um café

(sem biscoitos, não sejamos pretensiosos), para que possamos conhecer-nos novamente.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 4

22/05/2014 14:49:51

Sumário Resumido

Elipses e Hipérboles

Talvez seja porque estou com fome, mas elipses e hipérboles me lembram pipoca. Deixe-me explicar o motivo usando uma

linguagem bem salgada

Parte 5:**Matrizes e Montagem Matemática**

Operações e Cálculos com Matrizes

Infelizmente, você só aprenderá a fazer coisas chatas com matrizes aqui, não coisas legais como voar por aí e destruir vilões, como nos filmes Matrix.

A Enigmática Pílula Vermelha de Aplicações de Matrizes

Mesmo quando são um pouco difíceis de engolir, as matrizes fazem coisas realmente incríveis, como resolver sistemas de equações sem usar variável alguma. Elas têm força física para fazer milhares de apoios sobre uma única mão; então, é melhor nos rendermos a elas enquanto exibem seus poderes.

Teste Final

Este capítulo contém tantos problemas para praticar que, se você fizesse

*um por ano, teria que viver mais de 115 anos para terminá-
los. Claro que se você fizer um por minuto, levará somente umas 2
horas para terminar.*

Apêndice

A

Soluções dos Quadros “Você Tem Problemas”

285

B

Glossário 315

Índice 325

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 5

22/05/2014 14:49:51

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 6

22/05/2014 14:49:51

Sumário

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré – cálculo

1

1 Revisando Números e Aritmética

3

Classificações dos Números

4

Propriedades Algébricas

6

Regra dos Expoentes

8

Expressões com Radicais

10

Potências Fracionárias

11

Simplificação de Expressões com Radicais

11

2 Equações e Desigualdades

15

Resolução de Equações com Uma Variável

16

Escrevendo Equações Lineares

17

Representação Gráfica de Equações Lineares

20

Como Resolver Desigualdades Lineares

22

Notação de Intervalos

22

Desigualdades Têm Gosto de Frango

24

Desigualdades com Valores Absolutos

25

Desigualdades do Tipo Menor Que

25

Desigualdades do Tipo Maior Que

27

3 Praticando com Polinômios

29

Classificação de Polinômios

30

Adição e Subtração de Polinômios

31

Multiplicação de Polinômios

33

Divisão Longa de Polinômios

35

Divisão Sintética

37

Números Complexos

39

4 Fatoração de Polinômios

43

Máximo Divisor Comum

44

Descobrimos o Máximo Divisor Comum de Números Inteiros

44

46

Fatoração por Agrupamento

48

Padrões do Divisor Comum

49

Fatoração de Trinômios Quadráticos

51

O Método Bomba de Fatorar Trinômios

52

5 Expressões Racionais e Desigualdades Estranhas

55

Adição e Subtração de Expressões Racionais

56

O Mínimo Múltiplo Comum

56

Combinando Expressões Racionais

58

Multiplicação de Expressões Racionais

60

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 7

22/05/2014 14:49:51

viii O Guia Completo para Quem Não é C.D.F. - Pré-Cálculo
Divisão de Expressões Racionais

61

Resolução de Equações Racionais

62

Representação Gráfica de Desigualdades Estranhas

64

Desigualdades Quadráticas

65

Desigualdades Racionais

67

6 Funções 69

Combinação de Funções

69

Operações com Funções

70

Composição das Funções

71

Representação Gráfica de Funções

72

Quatro Importantes Gráficos de Funções

73

Transformação de Funções

74

Funções Inversas

78

O Comportamento das Funções Inversas

78

Criação de uma Função Inversa

80

Assíntotas de Funções Racionais

80

O Mínimo que Você Precisa Saber

83

Parte 2: Equações e Funções Não Lineares

85

7 Funções e Equações Elevadas a Altas Potências

87

Resolução de Equações Quadráticas

88

Completando o Quadrado

89

A Fórmula Quadrática

90

Encontro Judicial com as Raízes

92

Equações vs. Funções

92

O Teorema Fundamental da Álgebra

93

Teste do Coeficiente Principal

93

A Regra dos Sinais de Descartes

94

Teste da Raiz Racional

96

Fechando a Mala

98

8 Funções Logarítmicas

101

Avaliação de Logaritmos

102

Representação Gráfica de Logaritmos

103

Logaritmo Comum e Natural

107

A Fórmula da Mudança de Base

108

As Propriedades dos Logaritmos

110

9 Funções Exponenciais

113

Representação Gráfica de Funções Exponenciais

114

O Equilíbrio do Poder Logarítmico/Exponencial

117

Resolução de Equações Logarítmicas e Exponenciais

119

Crescimento e Decaimento Exponencial

123

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 8

22/05/2014 14:49:51

Sumário

ix

Parte 3: Trigonometria

127

10 Sendo Dobrado pelos Ângulos

129

Ângulos no Plano Cartesiano

130

Medição de Ângulos

132

Graus e Radianos

132

Conversão entre Graus e Radianos

134

Ângulos Côngruos

135

Trigonometria de Triângulos Retângulos

137

O Círculo Unitário

140

11 Representando Graficamente Funções

Trigonométricas 145

Funções Periódicas

146

Representando Graficamente o Seno e o Cosseno

148

Conectando os Pontos por Diversão e Lucro

149

Tempo de Brilhar do Cosseno

151

Representando Graficamente Funções Trigonométricas

151

Conheça o Resto da Família

153

Tangente

154

Cotangente

155

Secante e cossecante

156

12 Identidades Trigonométricas

Treinamento Básico

160

Identidades de Sinais

160

Identidades de Cofunções

161

Identidades Recíprocas

162

Identidades Pitagóricas

163

Treinamento Avançado: Simplificação de Expressões

Trigonométricas

164

Provando Identidades

166

Identidades para Corajosos

168

Fórmulas da Soma e da Diferença

169

Identidades de Ângulos Duplos

169

13 Resolvendo Equações Trigonométricas

171

Funções trigonométricas inversas

172

Esta é sua resposta final?

175

Equações básicas

176

Equações Quadráticas

177

Equações Desencontradas e Carentes

178

Equações Carentes com Quadrado

178

Equações carentes sem quadrado

179

Equações com ângulos múltiplos

180

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 9

22/05/2014 14:49:51

x

O Guia Completo para Quem Não é C.D.F. - Pré-Cálculo

14 Teoremas do Triângulo Oblíquo

183

Verificação de Referências para Ângulos Não Amigáveis

184

Contemple o Laço de Gravata

184

Aterrando Funções Trigonométricas

188

Obliteração de Triângulos Oblíquos

189

A Lei dos Cossenos

191

A Lei dos Senos

193

Como Calcular a Área de um Triângulo Oblíquo

196

Triângulos LAL

197

Triângulos LLL

198

Parte 4: Seções Cônicas

201

15 Parábolas e Circunferências

203

Introdução a Seções Cônicas

204

Exterminando Parábolas

206

Quadráticas Contendo um Termo x^2

207

Quadráticas Contendo um Termo y^2

212

A Circunferência Viciosa

215

16 Elipses e Hipérboles

219

Eclipsando Elipses

220

Anatomia Elíptica

221

Forma Padrão de uma Elipse

222

Calculando a Excentricidade

226

Lidando com Hipérboles

227

Partes Fresquinhas de uma Hipérbole

228

Forma Padrão de uma Hipérbole

229

Parte 5: Matrizes e Montagem Matemática

233

17 Operações e Cálculos com Matrizes

235

Adição e Subtração de Matrizes

236

Multiplicação de Matrizes

238

Cálculo dos Determinantes Usando Atalhos

239

Matrizes 2×2

240

Matrizes 3×3

241

Cálculo dos Determinantes Usando Expansões

242

Cálculo da Menor e dos Cofatores

243

Expansão de Linhas e Colunas

244

Regra de Cramer

246

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 10

22/05/2014 14:49:51

Sumário

xi

18 A Enigmática Pílula Vermelha de

Aplicações de Matrizes

249

Questões Relativas à Miscelânea de Matrizes

250

Matrizes Aumentadas

250

A Matriz Identidade

251

Operações com Linhas de Matrizes

252

Forma Escalonada por Linhas

254

Forma Escalonada Reduzida por Linhas

257

Por que Mesmo as Formas Escalonadas por Linhas Existem?

259

Matrizes Inversas

261

Resolução de Equações com Matrizes

263

19 Teste Final

267

Capítulo 1

268

Capítulo 2

268

Capítulo 3

269

Capítulo 4

269

Capítulo 5

270

Capítulo 6

270

Capítulo 7

270

Capítulo 8

271

Capítulo 9

271

Capítulo 10

272

Capítulo 11

273

Capítulo 12

273

Capítulo 13

274

Capítulo 14

274

Capítulo 15

275

Capítulo 16

275

Capítulo 17

275

Capítulo 18

276

Soluções

276

Apêndice

A Soluções dos Quadros “Você Tem Problemas”

285

B Glossário

315

Índice

325

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 11

22/05/2014 14:49:51

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 12

22/05/2014 14:49:51

Introdução

Nunca fui fã de “pré” nada. O único objetivo de jogar um “pré” na frente de uma palavra é dizer: “Ei, no final das contas o que você está fazendo será importante, mas por enquanto não é.” Você já fez algum “pré-teste” antes de um teste em aula?

Basicamente, ele se parece com um teste e faz você sentir-se como se estivesse fazendo o teste que fará ao fim de uma unidade, mas aqui está o truque: *you precisa fazê-lo antes de o professor, de fato, ensinar alguma coisa.*

Supostamente, os pré-testes ajudam os professores a “ajustar o plano de aula para indicar os pontos fortes e fracos de uma turma”, mas você e eu sabemos que isso não é verdade. Fui professor durante muito tempo e não creio ter visto algum professor mudar seu plano de ensino com base no resultado de um pré-teste, não importa o que se diga sobre isso. O único motivo pelo qual você recebe um pré-teste é para arraigar profundamente em seu subconsciente a seguinte ideia: “Ah, não, como vou aprender isso? Decididamente, sinto-me um estúpido, o que vou fazer? Eu sou uma desgraça!”

Quando você começa a entrar em pânico e perguntar se sua mãe estava certa ao tentar demovê-lo da ideia de estudar isso (“O mundo também precisa de escavadores”, diria ela, de um jeito muito doce e humilhante), a professora entra em cena e diz: “Não se preocupem, estou aqui pra salvá-los da ignorância. Abram seus cérebros e preparem-se para colocar tudo dentro.” É um jogo ardiloso de bom e mau policial, em que o pré-teste é o policial mau que não quer que você passe e a professora é o policial bom que quer somente que você passe (ou que você, pelo menos, não fure os pneus do carro dela quando ela mandar-lhe para a diretoria).

Então o “pré-teste” não é um teste, só algo que você precisa fazer antes de poder fazer algo mais interessante e gratificante. Quase todas as palavras com “pré”

funcionam dessa maneira. As Olimpíadas sempre ocorrem depois de “competições de pré-qualificação”, que só servem para fazer você *chegar* às Olimpíadas, não importa o resultado. A “pré-escola” representa somente o momento de “aprender como ir à escola”. Os trailers de “pré-estreia” de filmes são somente pequenos pedaços de um filme para deixá-lo entusiasmado com o lançamento, que, às vezes, demora meses ou anos.

As coisas com “pré” são irritantes, normalmente, não têm utilidade por si mesmas e são (talvez isto seja o mais apavorante), acima de tudo, *compromissos*. Quando você estuda pré-cálculo, há uma suposição implícita de que você pretende estudar cálculo adiante, e de que é tão difícil que você precisa preparar-se para isso *agora*.

Felizmente, o pré-cálculo não é uma palavra que funciona como as palavras com

“pré” em geral. Você não está somente se preparando para lutar com um monstro faminto quando desenvolve habilidades que são, nelas mesmas, inúteis. Embora dois cursos de Pré-cálculo não sejam iguais, a maioria deles engloba álgebra avançada, trigonometria, seções cônicas e matrizes — e valeria a pena aprender essas ferramentas mesmo se Cálculo não existisse.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 13

22/05/2014 14:49:51

xiv O Guia Completo para Quem Não é C.D.F. - Pré-Cálculo Acho que é disso que eu gostaria que você lembrasse mais que tudo ao abrir caminho na estrada dos tópicos deste livro. As coisas que você está aprendendo não são sem sentido e não estão aqui somente para apavorar você e fazê-lo estudar mais para uma disciplina que surgirá no futuro como um encontro às escuras com um doido. Esses tópicos são úteis *agora mesmo*, por motivos que farão sentido para você *agora mesmo*. Assim, jogue fora suas noções *pre* concebidas, seus medos *pre* eminentemente destrutivos e abraça o pré-cálculo (ou, pelo menos, compre este livro e abraça-o, caso o encontro fique conturbado).

Como Este Livro é Organizado

Este livro é dividido em cinco seções:

Na **Parte 1, “Requisitos Prioritários e do Pré-cálculo”**, você verificará se tem domínio das principais habilidades de álgebra necessárias no pré-cálculo. Pense nela como um breve curso de “*pré-pré-cálculo*”. E, entre as coisas que você vai revisar, há as propriedades algébricas, regras exponenciais, polinômios, fatoração, equações, desigualdades, frações complicadas e funções. Você provavelmente reconhecerá muito do conteúdo aqui apresentado, mas está destinado a aprender algo novo para adquirir uma compreensão mais ampla das coisas com as quais você já tinha algum tipo de familiaridade.

A **Parte 2, “Equações e Funções Não Lineares”**, amplia seus horizontes um pouco, usando o que você sabe sobre funções e equações e aumentando a aposta em cima disso. Você começará resolvendo equações quadráticas (usando três técnicas diferentes) e se qualificará para resolver equações de graus mais altos, como cúbicas e na quarta potência. Então, seguirá o caminho das funções exponenciais e logarítmicas, que são diferentes de tudo o que você já viu na vida. Esses gráficos não são simples retas. E não é só isso, eles têm existência própria, o que faz deles uma introdução perfeita aos gráficos loucos que ainda virão.

Na **Parte 3, “Trigonometria”**, você fará um aquecimento ao Sol com ângulos, triângulos, círculos e outras memórias geométricas durante algum tempo, e as coisas começarão a ficar estranhas. De repente, você estará fazendo representações gráficas de coisas repetitivas chamadas funções periódicas e manipulando o mecanismo complexo de funções trigonométricas, a fim de tentar provar que as identidades que elas criam são, de fato, verdadeiras. No fim da seção, porém, o trabalho duro será recompensado e você estará medindo componentes de triângulos e calculando áreas triangulares que você nunca sonhou que pudessem retornar dos velhos tempos de geometria (se é que você sonha com esse tipo de coisa, o que eu não recomendo fazer).

Na **Parte 4, “Seções Cônicas”**, palavras como *foco*, *vértice*, *centro*, *raio* e *diretriz* começarão a pipocar de todos os lugares, assim como todos os tipos de eixos (o que significa mais de um eixo, não os eixos do tipo “Eu sou um maníaco homicida fora do eixo”), como: de simetria, maior, menor, transversal e conjugado. Todas essas peças

PF_CG_TCIG_Pre-Calculus.indb 14

22/05/2014 14:49:51





Introdução

xv

se reúnem para formar quatro formas no Plano Cartesiano: parábolas, círculos, elipses e hipérboles, que (juntas) são chamadas de seções cônicas.

Finalmente, na **Parte 5, “Matrizes e Montagem Matemática”**, você será apresentado (ou reapresentado) ao relativamente novo campo de estudos matemáticos denominado matrizes. Elas não são nada mais que linhas e colunas de números (como tabuleiro de damas com dígitos, em vez de quadrados), mas com superpoderes incompreensíveis. Enquanto o tabuleiro só serve para jogar damas e fazer irmãos brigarem, as matrizes podem fazer todo o tipo de coisas, especialmente no que se refere a sistemas de equações. Quando você estiver sentindo que domina as matrizes (e todos os tópicos dos capítulos precedentes), experimente pôr as mãos no Teste Final, no Capítulo 19. Ele ajudará você a descobrir o que você realmente consegue fazer e o que você não compreende.

Coisas para Ajudá-lo ao

Longo da Trajetória

Como professor, encontrava-me constantemente saindo por tangentes — tudo o que mencionava me fazia lembrar de outras coisas. Esses fragmentos periféricos são abordados neste livro também. Apresento a seguir um guia para os diferentes quadros que você encontrará complementando as próximas páginas.

Ponto Crítico

Estas observações, dicas e ideias

Fale a Linguagem

ajudarão, ensinarão e divertirão.

A álgebra é repleta de

Elas acrescentarão alguma coisa

palavras e expressões doidas usadas

ao tópico abordado, seja um

por nerds. Para tornar-se o rei ou

conselho sincero, um pouco de

a rainha nerd da matemática, você

sabedoria ou algo para animar

precisará conhecer seus significados.

um pouco.

Alerta do Kelley

Embora eu venha a

avisar você sobre ciladas e perigos

comuns conforme for explicando os

tópicos de pré-cálculo, os perigos

nestes quadros merecem atenção

especial. Pense neles como crânios

ou ossos cruzados pintados em sinais

que você encontra ao longo do

caminho. Prestar atenção neles pode

xvi O Guia Completo para Quem Não é C.D.F. - Pré-Cálculo Como Você Fez Isso?

Muito frequentemente, as fórmulas algébricas surgem como mágica, ou você faz algo somente porque seu professor disse que era para fazer. Se alguma vez você já fez a pergunta “Por que isso funciona?”, “De onde vem isso?”, “Como aconteceu isso?”, é aqui que encontrará a resposta.

Você Tem Problemas

A matemática não é um esporte para espectadores. Depois que eu explico como resolver um problema, você deverá tentar resolver um exemplo sozinho. Esses convites à prática serão muito similares àqueles com os quais você se deparará nos capítulos, mas agora é sua hora de brilhar. Você encontrará todas as respostas, explicadas passo a passo, no Apêndice A.

Para minhas filhinhas gêmeas, Erin e Sara. Pedi a Deus que me desse uma garotinha para amar e Ele me deu duas. Claro, as duas tiveram cólicas, mas ninguém jamais disse que Deus não tinha senso de humor.

Agradecimentos

Sou dividido em duas partes distintas, o Mike dos livros e o Mike normal, e ambas requerem atenção constante, ajuda, apoio, amor e jogos de pôquer periódicos para sobreviver. Há um pequeno grupo de camaradas que não somente permitem que eu escreva, como também me encorajam a fazê-lo (então é a eles que você deve culpar).

Agradecimentos especiais a Jessica Faust (minha agente), Mike Sanders (da Alpha Books), Nancy Lewis (minha editora incrível e que muito sofreu), Sue Strickland (uma daquelas professoras raras que dizem que se importam com você e se importam de fato) e a meus primeiros amigos verdadeiros na área de publicações (que ainda recebem minhas ligações, acredite ou não), Roxane Cerda e David Herzog.

Minha estrutura de apoio familiar e de amigos também é muito segura, e talvez seja obcecada com prazos do mesmo modo. Para Dave (meu irmão), Carol (minha mãe), Matt “O profeta” Halnon, Chris “A

Cobra” Sarampote e Rob “Níqueis” Halstead (meus amigos mais próximos e velhos oponentes de pôquer do Texas), Lisa (minha esposa, melhor amiga e luz na escuridão), Nicholas (meu filho e realização da qual mais me orgulho): não tenho palavras para expressar meus agradecimentos por tudo que vocês fazem por mim diariamente sem que eu sequer chegue a pedir.

Finalmente, obrigado a Erin e Sara, duas garotinhas que amo de todo o coração.

Obrigado por acrescentarem uma alegria imensurável à minha vida e por esperarem para nascer depois que este livro foi escrito (quase que chegaram antes).

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 16

22/05/2014 14:49:53

Introdução xvii

Agradecimentos Especiais à Revisora Técnica

O Guia Completo Para Quem Não é C.D.F. – Pré-Cálculo foi revisado por uma especialista, que verificou a exatidão do conteúdo que você vai aprender aqui, para que este livro forneça tudo o que você precisa saber para preparar-se para estudar cálculo. Agradecimentos especiais, então, para Susan Strickland – que também revisou *O Guia Completo Para Quem Não é C.D.F. – Álgebra* e *O Guia Completo Para Quem Não é C.D.F. – Cálculo*.

Susan Strickland obteve grau de bacharel em matemática no St. Mary’s College, de Maryland, em 1979, e grau de Mestre em matemática na Lehigh University, em 1982.

Seguiu estudando matemática e educação matemática na The American University em Washington, D.C., de 1989 a 1991. Foi professora assistente de matemática e professora de alunos supervisionados em matemática secundária no St. Mary’s College, Maryland, de 1983 a 2001. Nesse período, teve a satisfação de ensinar Michael Kelley e supervisionar sua experiência como professor. Desde 2001, ela é professora de matemática no College of Southern Maryland e agora está envolvida com o ensino de matemática para futuros professores do ensino fundamental.

Dentre seus interesses, estão o ensino de matemática a “matematicofóbicos”, treinamento de futuros professores de

matemática e resolução de jogos e quebra-cabeças matemáticos (ela realmente é capaz de resolver o cubo mágico).

Marcas Registradas

Todos os termos mencionados neste livro que são ou acredita-se serem marcas registradas ou marcas de serviço aparecem com letras maiúsculas quando adequado.

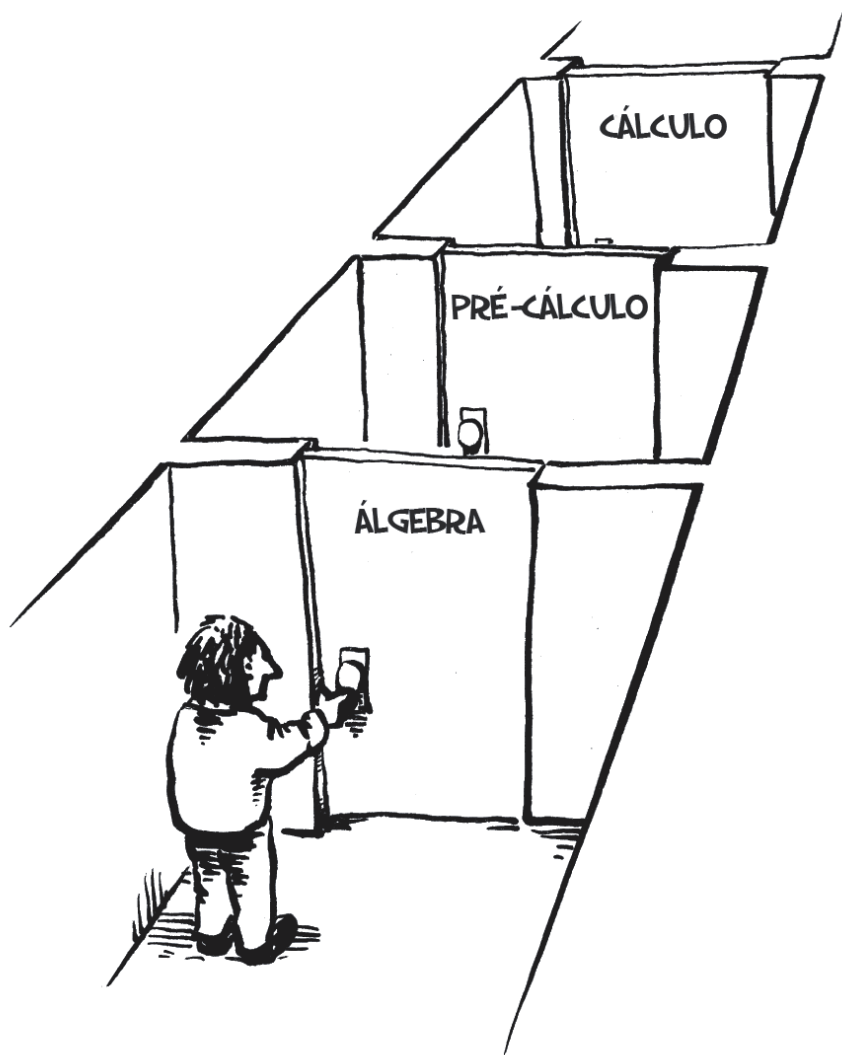
A Alpha Books e a Penguin Group (USA) Inc. não se responsabilizam pela precisão desta informação. Não se deve considerar o uso de nenhum termo neste livro, como algo que afete a validade de alguma marca registrada ou marca de serviço.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 17

22/05/2014 14:49:53

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 18

22/05/2014 14:49:53



Requisitos

Parte 1 Prioritários do

Pré – cálculo

Antes de começar a estudar pré – cálculo, você precisa dominar álgebra plenamente.

Por isso, nesta parte, ajudarei você a revisar as habilidades de álgebra que precisará usar depois. É claro que terei de fazer isso um pouco rapidamente, pois a maioria dos capítulos deve ser de revisão para

você. Se precisar de ajuda adicional com algum desses tópicos, sugiro minha introdução, *O Guia Completo para Quem não é C.D.F. Álgebra*. É só uma introdução (não como *Guerra nas Estrelas, Episódio 1: A Ameaça Fantasma*), nada muito difícil de vencer.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 1

22/05/2014 14:49:54

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 2

22/05/2014 14:49:54

Capítulo1

Revisando Números

e Aritmética

Neste Capítulo:

Classificação de números de acordo com suas propriedades

As regras básicas da álgebra

As leis dos expoentes

Simplificação de expressões com radicais

Por muitos motivos, nunca saltarei de paraquedas. Tenho um medo paralisante de altura. Meu romance antigo com o chão está bem estabelecido, mas, se saio dele por alguns momentos para escalar algum local alto (normalmente, contra minha vontade), não tenho vontade de sentir que se afastou de meus pés porque saí de improviso, devido a um passo em falso ou a uma queda azarada.

Porém, se em algum momento eu decidisse experimentar queda livre de um avião, com certeza me prepararia durante algum tempo, dominaria todas as habilidades necessárias, até as mais simples, para

que, no meio do salto, eu não fosse de repente perceber que não possuía uma habilidade importante (tal como a de evitar cair em um celeiro ou a de engolir o mínimo possível de insetos enquanto minha boca estivesse aberta em um grito de horror).

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 3

22/05/2014 14:49:54



4

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

Aprender pré – cálculo não é algo tão exaustivo fisicamente, tampouco tão apavorante quanto queda livre, mas o curso dura muito mais tempo que um único salto. Se você não domina todos os requisitos matemáticos, talvez se encontre de repente enrolado metaforicamente em seu paraquedas, ou, pior que isso, caindo rumo a um destino educacional cruel, ouvindo somente zumbidos dos sons de variáveis e equações incompreensíveis que passam por você durante a queda a uma velocidade inconcebível.

Neste capítulo, revisarei as habilidades mais básicas de álgebra e os termos do vocabulário que você precisará dominar quando chegar aos substanciosos tópicos de pré – cálculo, que começam na Parte 2. Mesmo se você achar que entende bastante de álgebra, deverá revisar o capítulo, pois seria trágico descobrir depois que a mochila em que você achava que estava o seu paraquedas na verdade estava vazia.

Classificações dos Números

Em sua vida, você já aprendeu várias coisas sobre números, mas precisará saber mais ainda a respeito da *descrição* dos números. Ao longo do livro, farei referência às principais classificações numéricas,

como os números racionais ou inteiros. Então, é importante que você entenda a que estou me referindo. Aqui estão eles listados, em ordem, do menor grupo numérico até o maior.

Números naturais: são os números que você usava para brincar de esconder.

Enquanto seus parceiros de brincadeira fugiam correndo, desaparecendo entre os arbustos, você espremia os olhos

contando “1, 2, 3, 4, 5, 6...”. De fato, por

Alerta do Kelley

esse mesmo motivo, este grupo também é

Tecnicamente, os

conhecido como grupo dos *números contáveis*.

números naturais podem combinar

Note que o menor número natural é 1 e o

frações e decimais irrelevantes.

grupo não contém números fracionários,

decimais ou negativos.

Por exemplo, 8 e 8,00 são números

1

naturais porque podem ser

Números naturais com zero: você

reescritos como 8, número que

acrescenta um membro adicional (o número

não requer a barra de fração nem

0) ao conjunto de números naturais. Assim,
a vírgula decimal.

obtem – se os números naturais acrescidos
de zero: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6... Basicamente, são
todos os números não negativos que não
contêm uma fração ou um decimal.

Números inteiros: Para gerar listas completas de números inteiros,
adicione

-1 , -2 , -3 , -4 ... (os opostos de cada número natural) ao conjunto
de números naturais com zero.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 4

22/05/2014 14:49:55



Capítulo 1: Revisando Números e Aritmética

5

Números racionais: qualquer número que pode ser expresso na
forma de fração $\frac{a}{b}$ (onde a e b são inteiros) é automaticamente um
número racional.

Assim, 2, $\frac{1}{2}$, e 7 são números racionais. É importante saber que se um 3

decimal repetir – se infinitamente (como no caso de 5,172172172172172...) ou terminar em um número determinado de casas decimais (como em 3,7 ou

– 14,98132), o número é, na verdade, uma fração disfarçada e, desse modo, um número racional.

Números irracionais: qualquer número que não esteja de acordo com os requisitos para encaixar – se entre os números racionais é agrupado com os números irracionais. Desse modo, para ser irracional, o número deve ser um decimal que não se repete e não termina (como o $\pi = 3,1415926535897932384$

626433832795..., que nunca segue nenhum padrão de repetição, não importa quantas casas decimais sejam incluídas), sendo impossível expressá – lo em forma de fração.

Números reais: o que se obtém ao combinar todos os números racionais e irracionais? Uma arma química perigosa e volátil? Uma dança estranha que se aprende no colégio, em que cada grupo de números fica em um lado do ginásio sem conversar com os outros? Não. Obtém – se os números reais.

Como homens e mulheres, que em conjunto são denominados “humanos”, os racionais e irracionais juntos são conhecidos como “reais”.

Números complexos: um número complexo tem a forma $a + bi$, em que a e b são números reais e i tem o valor bizarro de $i^2 = -1$. Como não é

possível obter a raiz quadrada de um número negativo, i é descrito como imaginário. Então, no número complexo $a + bi$, a é chamado de parte real e bi é a parte imaginária.

Você trabalhará só um pouco com números complexos em pré – cálculo, mas precisará saber como efetuar operações aritméticas básicas com eles.

Abordarei esse assunto no final do Capítulo 3.

Ponto Crítico

Os números inteiros são automaticamente números racionais, porque podem ser expressos como seus próprios quocientes e 1. Por exemplo,

$$13 = \frac{13}{1}$$

, de modo

1

que 13 é definitivamente racional. E qualquer número real é automaticamente um número complexo. Como é possível reescrever -5 como $-5 + 0i$, -5 é um número complexo, mesmo que a parte imaginária, $0i$, tecnicamente seja igual a 0.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 5

22/05/2014 14:50:00



6

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

Tenha em mente que a maioria dos números

pode ser classificada de muitas formas

Você Tem Problemas

diferentes e não pertence a um único grupo.

Problema 1: Simplifique a expressão

Assim como uma baleia pode ser classificada como um mamífero e como “algo muito grande

– 5

2

+

e identifique todas as

3

para caber com conforto em uma minivan”,

classificações possíveis para o resultado.

o número 7 pode ser classificado como um

número natural (sem e com zero), número

inteiro, número racional, número real, número

complexo e como um número que aparece

no nome de um filme incrível com Brad Pitt e

Morgan Freeman.

Propriedades Algébricas

Uma *propriedade* é um fato matemático tão básico e fundamental que é aceita como verdade (ainda que não seja possível prová-la rigorosamente). A matemática, como qualquer sistema lógico ou de crenças, tem certas verdades fundamentais que, embora sejam “obviamente corretas”, não podem ser provadas empiricamente. As propriedades algébricas mais comumente mencionadas estão listadas a seguir:

Propriedade associativa (da adição e da multiplicação). Se você recebe uma soma

Fale a Linguagem

(uma lista de números reais somados) ou um

As regras mais básicas

produto (resultado de uma multiplicação

e não provadas que compõem

de números), é possível agrupá-los como

os fundamentos da álgebra são

desejado (colocando parênteses em qualquer

chamadas de **propriedades**

local), e o resultado não será modificado.

algébricas (ou axiomas).

Note que as expressões a seguir têm o

mesmo valor, mesmo que a posição dos

parênteses seja diferente.

$$(3 + 4 + 1) + 6 + (7 + 11)$$

$$3 + (4 + 1 + 6 + 7) + 11$$

Alerta do Kelley

Lembre-se de que

$$= 8 + 6 + 18$$

$$= 3 + 18 + 11$$

as propriedades associativas e

$$= 32$$

$$= 32$$

comutativas só funcionam com a
adição e a multiplicação. Se você
reagrupar ou reordenar problemas de

**Propriedade comutativa (da adição e
subtração e divisão, é bem provável
da multiplicação).** Diante de uma adição
que o resultado seja diferente. Por
ou produto, é possível alterar a ordem dos
exemplo, $10 \div 2$ e $2 \div 10$ fornecem
números envolvidos, mas isso não altera o
resultados definitivamente diferentes.
valor da adição ou do produto.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 6

22/05/2014 14:50:03



Capítulo 1: Revisando Números e Aritmética

7

$$4 \cdot 5 \cdot (-3) \cdot 2$$

$$2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot (-3)$$

$$\begin{aligned}
 &= 20 \cdot (-3) \cdot 2 \\
 &= 10 \cdot 4 \cdot (-3) \\
 &= -60 \cdot 2 \\
 &= 40 \cdot (-3) \\
 &= -120 \\
 &= -120
 \end{aligned}$$

Propriedades de identidade (da adição e da multiplicação). Se você adicionar 0 a qualquer número real ($a + 0$) ou multiplicar um número real por 1 ($a \cdot 1$), obterá o número original de volta, não modificado (a). Esse fato não faz a terra tremer, eu sei. No entanto, você deve lembrar que, como resultado, 0 é chamado de *identidade aditiva* e 1 é conhecido como *identidade multiplicativa* (quando aplicados, esses dois números não mudam a *identidade* de outros números ou variáveis).

Propriedade inversa. Cada número real b tem um *oposto*, escrito $-b$, de modo que a soma de um número e seu oposto é igual a 0: $b + (-b) = 0$. Além disso, cada número real b diferente de zero também tem um *recíproco*, definido como $1/b$, e quando você multiplica um número por seu *recíproco*, b obtém $b \cdot 1/b = 1$.

$b \cdot 1/b$

Fale a Linguagem

As identidades da adição e da multiplicação são (respectivamente) 0 e 1. Note que, quando uma propriedade inversa é aplicada a

um número, o resultado é sempre uma dessas identidades (ao adicionar **opostos**, você obtém a **identidade aditiva**, quando multiplica **recíprocos**, obtém a **identidade multiplicativa**).

Propriedade simétrica. Você pode inverter os lados de uma equação sem afetar sua solução. Em outras palavras, se $x = y$, então $y = x$. A propriedade simétrica é mais comumente usada ao tentar resolver

uma equação e quando se quer isolar a variável em um lado particular, normalmente o lado esquerdo da equação. Mesmo que uma solução final de $-4 = x$ seja aceitável, a solução considerada melhor esteticamente pela maioria das pessoas é a de $x = -4$.

Propriedade transitiva. Se $a = b$ e $b = c$, então $a = c$. Pense nas propriedades transitivas deste modo: se você é tão alto(a) quanto eu e eu sou tão alto quanto o ator William Shatner (o que é verdade, eu e ele temos 1,78m de altura), então você deve ter exatamente a mesma altura de William Shatner.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 7

22/05/2014 14:50:05

8

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

Propriedade distributiva. A expressão $a(b + c)$ é igual a $ab + ac$. Em outras palavras, é possível distribuir em um problema de subtração ou uma combinação de adição e subtração, deste modo: $a(b + c - d) = ab + ac - ad$.

Propriedade de substituição. Se duas expressões são iguais, é possível substituir uma pela outra. Por exemplo, se é dado que $2x - 3y = 9$ e você sabe que $x = 5y$, é possível substituir $5y$ por x na equação $2(5y) - 3y = 9$.

Propriedades do Banco Imobiliário. Se você já jogou Banco Imobiliário sendo ruim em álgebra, mantenha em mente que o objetivo é adquirir propriedades como Avenida Paulista, Morumbi, Interlagos e Avenida Augusta. Você vai xingar tudo e todos na hora de pagar o aluguel. É diabólico.

Mesmo que você se sinta tentado a substituir os nomes das propriedades por nomes mais compreensíveis (como referir-se à propriedade simétrica como “a propriedade espelho”), aprenda os

nomes reais e faça uso deles. Desse modo, é mais fácil comunicar seus pensamentos e justificativas, pois, mesmo que você saiba o que quer dizer ao mencionar “Sabe, aquela que diz que você pode mover as coisas?”, as outras pessoas podem não saber.

Você Tem Problemas

Problema 2: Identifique as propriedades que justificam as expressões a seguir: a. $4 + 1 = 9 - 4$ é equivalente a $9 - 4 = 4 + 1$

b. $(3)(-7)(8) = (8)(-7)(3)$

c. $4(x - 2) = 4x - 8$

d. $(-3 + 2) + 1$

$2)(-3) =$

Regra dos Expoentes

É possível indicar a multiplicação repetida de um número, variável ou quantidade usando *expoentes*. Na expressão x^7 (leia “ x elevado à sétima potência”), x é a *base* e 7 é o *expoente*, ou *potência*. A notação x^7 significa o mesmo que $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$.

Além disso, é possível reescrever a expressão $5y \cdot 5y \cdot 5y \cdot 5y \cdot 5y \cdot 5y$ como $(5y)^6$, onde $5y$ é a *base* elevada à *potência* 6 (o número total de vezes em que a base aparece multiplicada por si mesma).

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 8

22/05/2014 14:50:07



Embora a notação exponencial seja tecnicamente só um jeito rápido de reescrever um problema, é possível trabalhar facilmente com expressões exponenciais sem ter que reescrevê-las primeiramente do jeito longo. Siga estas regras:

$xaxb = xa + b$: se duas expressões exponenciais (com a mesma base) são multiplicadas, o produto é a base comum elevada à *soma* das potências $w^3 \cdot w^9 = w^{3+9} = w^{12}$. Mesmo que a expressão $y^2 \cdot y^3$ seja um produto, a resposta é y^5 , *não* y^6 ; é necessário adicionar os expoentes, não multiplicá-los. Lembre-se de que os expoentes são apenas o caminho mais curto das multiplicações repetidas, então $y^2 \cdot y^3$ na realidade corresponde a $(y \cdot y)(y \cdot y \cdot y)$. De acordo com a propriedade associativa, é possível reagrupar todos esses y 's juntos para obter $y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y = y^5$.

xa

$= xa - b$

xb

: se duas expressões exponenciais (novamente, devem ter a mesma base) são divididas, o resultado é a base comum elevada à diferença das b^{12}

potências: $= b^{12-7} = b^5$

b^7

. Note que é necessário subtrair sempre a potência

do denominador da potência do numerador. A regra anterior afirmava que a multiplicação de expressões com expoentes implicava a adição de potências, então faz sentido que a *divisão* de expressões com expoentes implique a *subtração* de potências, uma é o inverso da outra.

$(x^a)^b = x^{ab}$: se uma expressão exponencial é elevada a um expoente, multiplique os expoentes juntos e mantenha a base comum: $(k^3)^4 = k^{3 \cdot 4} = k^{12}$.

Outra opção é expandir a expressão com expoentes

$$(k^3)^4 = (k^3)(k^3)(k^3)(k^3) = k^{3+3+3+3} = k^{12}.$$

a

$()$

$$(xy)^a = x^a y^a \text{ e } x^a = x^a$$

$(|y|)$

ya : se um produto ou quociente inteiro é elevado a um expoente, cada parte individual da expressão é elevada ao expoente: $(x^2 y)^3 = (x^2)^3 \cdot (y)^3 = x^6 y^3$.

$x^1 = x$ e $x^0 = 1$: qualquer número elevado na primeira potência é

Alerta do Kelley

igual ao próprio número, então

Se uma soma ou

$$13^1 = 13 \text{ e } (-4)^1 = -4 \text{ (como isso)}$$

diferença é elevada a um expoente,

é verdadeiro, realmente não

não é possível elevar cada parte a esse

há necessidade de escrever o

$$\text{expoente, como em } (x + y)^2 \neq x^2 + y^2$$

expoente de 1). Adicionalmente,

e $(a - b)^3 \neq a^3 + b^3$. Esse tipo de se qualquer número (exceto zero)

problema de expansão é revisado
for elevado na potência zero, é
no Capítulo 3.

possível obter 1: 130 e $(-4)^0 = 1$.

Você não vai lidar com o valor de
“expressão 0°” até estudar cálculo.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 9

22/05/2014 14:50:22



10

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

$x - a = 1$ e

: um expoente negativo indica que o número ao qual está

xa

vinculado está na parte errada da fração; se esse número for movido
na barra de fração (do numerador para o denominador ou vice
– versa), isso resolve o problema e o expoente negativo fica positivo
novamente.

Ponto Crítico

Pegue, por exemplo, a fração x^{-4} y 2. Como x e z Se uma fração
inteira é elevada

z^{-1}

a uma potência negativa, é

têm potências negativas, mova cada um deles

possível pegar o recíproco

na barra de fração para obter $y^2 z$. Por que fazer da fração e tornar o

x^4

expoente positivo:

isso? Muitos professores consideram algo não

2

—

2 2

4

simplificado uma solução contendo expoentes

$(x^y)^z$

y^z

y^z

2

2

negativos, então é necessário descartar essas

$(|y|)^z = (|x|)^z = x^z$

potências negativas em sua resposta final.

Exemplo 1: Simplifique a expressão $(m^2 p)^3 \cdot (m p^2)^{-2}$.

Solução: Note que cada expoente é elevado a um expoente, então multiplique as potências:

$(m^2 p)^3 (m^{-1} p^{-2})^2 = m^6 p^3 \cdot m^{-2} p^{-4}$

De acordo com a propriedade comutativa, é possível rearranjar a

ordem das bases e então adicionar os expoentes às bases correspondentes.

$$m^6 m^{-2} \cdot p^3 p^{-4} = m^{6-2} p^{3-4} = m^4 p^{-1}$$

Elimine o expoente negativo movendo p para o denominador.

$$m^4$$

$$p$$

Você Tem Problemas

—

$$3^5$$

$$2$$

Problema 3: Simplifique a expressão $(x^3 y^2)^4$.

$$(x^3 y^2)^4$$

Expressões com Radicais

Até agora discutimos somente expoentes que são inteiros, mas não é somente possível ter expoentes racionais, é também bastante comum. Entretanto, essas potências fracionárias se escondem em disfarces de expressões com radicais PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 10

22/05/2014 14:50:28



Capítulo 1: Revisando Números e Aritmética

provavelmente não se referirá a elas como “radicais” no sentido descritivo, a menos que seja um punk skatista duro na queda, animado com álgebra. Tenho certeza de que há poucos sujeitos assim, e não é fácil encontrá-los.

Potências Fracionárias

Uma *expressão com radical* se parece com isto: $b \sqrt[a]{a}$ (leia “raiz b-ésima de a”).

Certifique-se de observar que a poderia ser qualquer número real, mas b deve ser um inteiro positivo. O número a dentro da raiz é denominado *radicando* e o b minúsculo aninhado sobre o “ $\sqrt{}$ ” da raiz é denominado *índice*.

Como mencionei há pouco, uma expressão com radical realmente é o resultado de uma potência fracionária. Especificamente, as potências fracionárias são definidas assim: $a^{1/b} = \sqrt[b]{a}$. O denominador da potência fracionária vira o índice da raiz: $x^{1/4} = \sqrt[4]{x}$ $7^{1/2} = \sqrt{7}$

$$(5w)^{1/3} = \sqrt[3]{5w}$$

Uma potência fracionária, contudo, nem sempre tem numerador 1, como acontecia com os exemplos

Ponto Crítico

anteriores. Ao transformar

Se uma expressão com radical

um expoente racional em uma

não tem um índice (como 7),

expressão com raiz, o numerador

entende-se que é 2. Essas

vira a potência do radicando ou o

expressões são denominadas

expoente da *expressão com radical*

raízes quadradas (expressões

inteiro. Por exemplo, $x^{2/3}$ pode ser

com um índice 3 são

denominadas *raízes cúbicas*).

reescrito como 3×2 ou 3×2 .

Em ambos os casos, o denominador do expoente racional sempre vira o índice da expressão com radical.

Você Tem Problemas

Problema 4: Reescreva os itens a seguir como expressões com radicais.

a. $y^{1/2}$

b. $b^{3/2}$

Simplificação de Expressões com Radicais

Se a álgebra ensinou alguma coisa, foi que (por algum motivo inexplicável) simplificar as coisas era a razão de você estar vivo.

Fração não totalmente reduzida? Ataque! Isso é um polinômio contendo termos semelhantes que não estão

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 11

22/05/2014 14:50:32



imediatamente!

Aqui estão alguns exemplos para ajudar a revisar a simplificação de expressões com radicais, de modo que você esteja preparado para mobilizar sem aviso e atacar aqueles monstros demoníacos não simplificados.

Exemplo 2: Simplifique as expressões com radicais.

a. $32x^3$

Como o índice dessa expressão é 2, você quer escrever 32 e x^3 , de modo que contenha o máximo possível de expoentes de 2 (fatore ambas usando os quadrados perfeitos maiores possíveis).

$$16 \cdot 2 \cdot x^2 \cdot x$$

$$4^2 \cdot 2 \cdot x^2 \cdot x$$

Como as potências de 42 e x^2 são iguais ao índice do radical, elas são tiradas da raiz (sem seus expoentes), mas o 2 e o x no radicando devem ficar antes da raiz: $4|x|2x$. Verifique a barra com cuidado se estiver se perguntando de onde surgem essas fórmulas com valores absolutos.

b. $84/3$

Alerta do Kelley

Comece reescrevendo o expoente racional

4

Se a potência n par de

em forma de expressão com radical: $\sqrt[n]{8}$

uma variável for igual ao índice do

radical

, é necessário

(também é possível reescrevê-la como $\sqrt[3]{84}$,

mas 84 é um número bem grande e será bem

escrever os símbolos de valores

mais difícil de simplificar). Como $\sqrt[3]{8} = 2$,

absolutos ao simplificar.

substitua 2 na expressão e você terá $(2)^4$, que

é igual a 16.

c. $\sqrt[3]{16 y^3 54 y}$

Não adicione os radicais juntos. É possível combinar os coeficientes dos radicais somente se os radicandos forem exatamente os mesmos (os índices também precisam ser os mesmos, mas, neste caso, ambos são 3, então está tudo certo).

Tente simplificar os radicais usando o máximo possível de cubos perfeitos, de modo que seja possível tirar os expoentes de 3 do sinal do radical.

$\sqrt[3]{2^3 \cdot 2 \cdot y^3 \cdot 3^3 \cdot 2 \cdot y^2 \cdot 2 y^3 \cdot 2 y}$ Agora que ambos os radicais nas expressões têm índices correspondentes (3) e radicandos correspondentes ($2 y$), é possível combinar seus coeficientes ($2 \cdot 3 = 1$) para obter $\sqrt[3]{2^3 \cdot 2 y}$ ou simplesmente $\sqrt[3]{2 y}$.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 12

22/05/2014 14:50:37

Capítulo 1: Revisando Números e Aritmética 13

Você Tem Problemas

Problema 5: Simplifique as expressões a seguir:

a. $16^{5/2}$

b.

$28 x^2$

$63 x^2$

$7 x^2$

O Mínimo que Você Precisa Saber

As classificações numéricas algébricas básicas, da menor à maior, são: números naturais, naturais com zero, inteiros, racionais, irracionais, reais e complexos.

As propriedades algébricas, embora não sejam comprováveis tecnicamente, são aceitas como fatos.

Você precisa aderir a leis específicas ao simplificar expressões com expoentes.

Expressões com radicais normalmente são geradas por expoentes racionais PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 13

22/05/2014 14:50:38

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 14

22/05/2014 14:50:38

Capítulo2

Equações e Desigualdades

Neste Capítulo:

Resolução de equações com uma variável

Criação e representação gráfica de equações lineares

Soluções para desigualdades lineares

Aplicação de notação de intervalos a desigualdades

Representação gráfica de desigualdades unidimensionais e bidimensionais A matemática não seria muito mais divertida se tivéssemos que lidar somente com os simples e bem conhecidos números usados no dia a dia? Aprendendo a somar, subtrair, multiplicar e dividir, você teria aprendido todo o necessário. Por fim, você se sentiria insatisfeito, pois os seres humanos buscam um pouco de mistério na vida — buscamos o desconhecido. Em matemática, os desconhecidos são realmente fáceis de identificar — são as letrinhas em itálico que você ama e conhece como variáveis.

É claro que as variáveis, às vezes, podem causar mais problemas do que deveriam.

Haverá momentos em que elas o desafiarão e, apesar de seus melhores esforços, você não conseguirá descobrir o valor que estão escondendo. Mas vamos encarar os fatos: esse é um dos motivos pelos quais você as ama tanto. As variáveis são um pouco malvadas, sempre tentando iludi-lo, mas também ficam muito satisfeitas quando você descobre quem são, apesar de todo o seu ar de mistério. Mesmo quando você finalmente consegue reconhecer e proclamar “Aha! $x = -2$, é isso!”, a variável PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 15

22/05/2014 14:50:38



16

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

dá um sorrisinho e diz “Talvez dessa vez, mas veremos se você vai conseguir me descobrir em sua próxima tarefa”.

Neste capítulo, você revisará as equações e desigualdades básicas com uma e duas variáveis, como vocês se viram pela primeira vez. Convidei vocês para se encontrarem aqui, um local neutro, sem que

soubessem, de modo que possam apaixonar-se novamente (algo do tipo *Operação Cupido*, com descobertas com gosto de matemática).

Resolução de Equações

com Uma Variável

Todas as estratégias de resolução de equações se resumem a um princípio: tudo o que você faz de um lado da equação deve também ser feito do outro, ou o delicado equilíbrio da igualdade é arruinado. Pense nos lados de uma equação como gêmeos: se não tratá-los da mesma maneira, toda sua família logo ficará muito insatisfeita.

Falando em termos matemáticos, tratar os dois lados de uma equação da mesma maneira significa adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir pelo mesmo número em ambos os lados, com um objetivo em mente: isolar a variável, de modo que fique sozinha em um dos lados da equação e a solução fique do outro.

Exemplo 1: Resolva a equação $12(3x - 8) = 25$.

Solução: Comece distribuindo -1 pelos parênteses:

2

Ponto Crítico

3

Lembre-se de que, para

$$2x + 4 = 25$$

multiplicar uma fração e um

número inteiro, é possível

Isole o termo que contém a variável, subtraindo

reescrever o número inteiro

4 dos dois lados da equação

em forma de fração com o

denominador 1. No exemplo 1,

$$32 \times 4 \times 25$$

$$1$$

$$3$$

$$3$$

$$- \cdot 3$$

$$1$$

$$= - \cdot = -$$

$$4$$

$$-4$$

$$2$$

$$2 \ 1$$

$$2$$

$$32 \ x$$

$$21$$

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 16

22/05/2014 14:50:40

Capítulo 2: Equações e Desigualdades

$$17$$

Para isolar x (e, assim, resolver a equação) multiplique ambos os lados pelo recíproco do coeficiente de x .

Para verificar a resposta, é possível retornar à equação original de x e ver o que acontece:

$$1$$

$$- (3(-14) - 8)$$

$$2$$

$$1$$

$$= -(-42 - 8)$$

$$2$$

$$1$$

$$= -(-50)$$

$$2$$

$$= 25$$

Se você tiver chegado a um resultado correto no fim, a solução de $x = -14$ deve estar correta.

Você Tem Problemas

Problema 1: Resolva a equação

.

Escrevendo Equações Lineares

É possível construir a equação de qualquer reta tendo somente três elementos importantes:

A inclinação da reta, m

Um ponto na reta (a, b)

Uma caixa cheia de ratos vivos

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 17

22/05/2014 14:50:41



18

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

Honestamente, não compreendo porque o último ingrediente é necessário, mas quem sou eu para discutir com o famoso matemático René Descartes, fundador renomado da geometria analítica e amante de roedores? Falando sério, você pode mesmo construir a equação usando somente as duas primeiras coisas (mas acredite em mim, o

Fale a Linguagem

clima não será o mesmo).

Se uma reta tem

Para criar a equação de uma reta, simplesmente

inclinação m e contém o

junte o coeficiente angular m e o ponto (a,b) na

ponto (a, b) , então ela é representada

fórmula ponto-coeficiente angular (aposto que você

pela equação $y - b = m(x - a)$,

nunca descobrirá de onde esse nome saiu).

chamada **fórmula**

ponto-coeficiente angular.

$$y - b = m(x - a)$$

Alguns livros usam a fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$ para descrever a fórmula 1

1

ponto-coeficiente angular; isso ocorre porque eles usam (x_1, y_1) para denotar o ponto, 1 1

em vez de (a, b) , mas ambas as fórmulas fornecerão a mesma resposta.

Quando você junta os valores corretos do coeficiente angular com os dos pontos, pode ser solicitado a escrever a equação de uma das duas formas a seguir:

Forma padrão. Os termos x e y deverão ser mantidos no lado esquerdo da equação; o número deverá ficar à direita. Além disso, os coeficientes de x e y não podem ser uma fração, e o coeficiente de x deve ser positivo.

Matematicamente falando, uma equação é uma forma padrão que se parece com $Ax + By = C$, onde A e B são inteiros e $A > 0$. Além disso, se uma reta estiver na forma padrão, sua inclinação é igual a $-\frac{B}{A}$; às vezes, esse atalho é B

muito útil.

Forma do intercepto-coeficiente angular. Uma equação linear está automaticamente na forma do intercepto-coeficiente angular quando você isola o y no lado esquerdo da equação.

Normalmente, é bom fazer isso, pois o

coeficiente x resultante é a inclinação da

Alerta do Kelley

reta, e a constante é o intercepto y da reta.

Você escreverá equações

Em outras palavras, a equação $y = mx + b$ está lineares pelo resto de sua carreira

na forma do intercepto-coeficiente angular,

matemática, então certifique-se

pois está resolvida para y . A inclinação dessa

de memorizar as fórmulas para

reta é m e seu intercepto y é b .

intercepto-coeficiente angular e as

formas padrão (também certifique-se

Se não houver uma instrução específica no

de ter sempre consigo aquela caixa

problema para usar uma dessas formas, eu

com você o resto da vida).

usaria como forma padrão a intercepto-coeficiente angular. Como o seu resultado

da fórmula intercepto-coeficiente angular já

está quase resolvido para y , só é preciso uma

pitada de esforço.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 18

22/05/2014 14:50:43



Capítulo 2: Equações e Desigualdades

19

Exemplo 2: Escreva a equação de cada reta na forma indicada.

a. Escreva a reta k , que contém os pontos $(3, -1)$ e $(2, 9)$, na forma intercepto-coeficiente angular.

Solução: Em álgebra, você aprendeu que a inclinação que conecta dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) era igual a

:

$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

2 2

Agora que você conhece a inclinação, substitua-a, juntamente com os valores dos pontos dados, na forma ponto-coeficiente angular. Eu usarei o ponto $(3, -1)$, mas você obterá a mesma resposta final usando $(2, 9)$.

Para escrever isso na forma de intercepto-coeficiente angular, resolva a equação para y (subtraindo 1 de ambos os lados):

$$y = -10x + 29$$

b. Escreva o ponto j na forma padrão, sabendo que j tem um intercepto y de -5 e é perpendicular à reta da equação $2x - y = 5$.

Solução: A inclinação de $2x - y = 5$

é -2 =

1 2 (de acordo com o atalho

Ponto Crítico

que mencionei para a forma

Não se esqueça desse

padrão); então, a inclinação de j

importante fato algébrico.

deve ser a recíproca oposta: -1 .

Retas paralelas têm inclinações

2

idênticas, e retas perpendiculares

Se j tiver um intercepto y de -5 ,

têm inclinações que são

então deve passar pelo ponto $(0, -5)$.

opostas recíprocas.

Use esse ponto e essa inclinação na

fórmula ponto-coeficiente angular

(você adivinhou):

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 19

22/05/2014 14:50:45

20

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

Os termos x e y devem ficar no lado esquerdo da equação na forma padrão (e a constante, 5, deve ser movida para a direita).

O coeficiente de x agora é positivo, atendendo a outros requisitos da forma padrão, mas não é um número inteiro (lembre-se de que tanto este quanto o coeficiente de y devem ser inteiros), então multiplique ambos os lados da equação por 2 para eliminar a fração.

Você Tem Problemas

Problema 2: Se o ponto $(-7, -3)$ encontra-se sobre a reta w , e w é paralelo à reta v (cuja equação é $6x + y = 4$), escreva a equação de w na forma intercepto-coeficiente angular.

Representação Gráfica de

Equações Lineares

O gráfico de uma reta, como qualquer gráfico no plano cartesiano, consiste em todos os pontos (x, y) que tornam a equação verdadeira. Quantos pontos há no gráfico de uma reta? Um número infinito. (Você sabe exatamente ao que estou me referindo se já ficou esperando na fila para andar na montanha russa mais badalada do momento.) No entanto, por sorte, todos os pontos de um gráfico linear se comportam de maneira previsível (todos ficam limpinhos e organizados numa linha, como formiguinhas voltando para casa carregando pedaços de um sanduíche); então, é desnecessário determinar mais de dois pontos para obter um gráfico que é tão preciso quanto um que contém 3.000 pontos. O método que descrevo no Exemplo 3 (denominado “método do intercepto” em alguns livros-texto) é somente um dos vários modos de representar uma reta graficamente, mas acho que é o mais fácil.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 20

22/05/2014 14:50:46



Capítulo 2: Equações e Desigualdades

21

Alerta do Kelley

O método do intercepto não funciona se houver somente uma variável

na equação, como em $x = 3$ ou $y = -1$, mas você realmente não precisa fazer isso. O

gráfico de uma reta com a equação $x = a$ é somente uma linha vertical no plano de coordenadas naquele valor de a . Por exemplo, o gráfico de $x = -2$ é uma linha vertical infinitamente longa, duas unidades à esquerda da origem. De maneira semelhante, o gráfico de $y = b$ é uma linha horizontal em b . Não há necessidade de fazer nenhum trabalho real para gerar esses gráficos, eles são automáticos.

Exemplo 3: Represente graficamente a equação linear $3x - 2y = 6$.

Solução: Um de cada vez, substituirei x e y por 0 e então vou obter com a operação o valor do intercepto da outra variável. Embora eu comece definindo que $x = 0$, poderia, do mesmo modo, ter começado corretamente também com $y = 0$; a ordem não importa.

Essa reta cruzará o eixo y no ponto $(0, -3)$. Para achar o intercepto de x , volte à equação original, agora substituindo por $y = 0$:

A reta deve alcançar o eixo x no ponto $(2, 0)$. Para gerar o gráfico, simplesmente indique os pontos $(0, -3)$ e $(2, 0)$ no plano cartesiano e trace uma reta que passe por eles, como na Figura 2.1. Lembre-se de que a reta se estende infinitamente em qualquer direção. Não é um segmento como aqueles que têm pontos finais.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 21

22/05/2014 14:50:46

22

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

Figura 2.1

O gráfico de $3x - 2y = 6$ é a

reta que conecta e se estende

através de seu intercepto x

$(2, 0)$ e seu intercepto y $(0, 3)$.

Você Tem Problemas

Problema 3: Represente graficamente a equação $x - 3y = -5$.

Como Resolver Desigualdades Lineares

Desigualdades são muito semelhantes a equações. Gostam do mesmo tipo de música (contemporânea, estranhamente), dos mesmos tipos de filmes com Kevin Costner (nenhum) e ambas esperam poder um dia participar de *Topa tudo por dinheiro*. De fato, seria possível pensar em equações e desigualdades como irmãs gêmeas, como se fossem as atrizes Mary-Kate e Ashley Olsen do mundo matemático. Contudo, irmãos gêmeos têm diferenças muito sutis, e são essas diferenças que você precisa entender.

Notação de Intervalos

Em pré-cálculo, a *notação de intervalos* é usada para expressar as respostas das desigualdades. Não é um novo tipo de problema que você precisa resolver, só um jeito novo de escrever respostas de problemas que você já consegue fazer. Um

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 22

22/05/2014 14:50:47



Capítulo 2: Equações e Desigualdades

23

intervalo é um pedaço da reta numérica, embora pareça só um par de números no jardim entre parênteses, colchetes ou uma combinação dos dois. Esses números são os limites da resposta escritos em ordem, o limite menor primeiro e o limite maior depois.

Você precisará decidir sobre usar

colchetes ou parênteses para cada limite

do intervalo separadamente, e esta é a

Fale a Linguagem

pergunta que você se faz para chegar

A notação de

a essa decisão: “Este é um número real

intervalos é um método fácil de

finito que está incluído no resto do

expressar desigualdades que

grupo?”. Se a resposta for afirmativa,

consistem em dois números limites

use colchetes. Se a resposta para

entre parênteses ou colchetes,

qualquer parte da pergunta for negativa,

dependendo se cada limite está

use parênteses. Lembre-se de investigar

incluído na notação de intervalos.

cada limite separadamente, pois a

inclusão ou exclusão de um não implica

a necessidade de fazer o mesmo com o outro.

Exemplo 4: Reescreva as desigualdades usando a notação de intervalos.

a. $-1 < x < 5$

Solução: Os limites menor e maior não podiam ser mais claros, são eles -1 e 5 , respectivamente. Contudo, -1 e 5 não são de fato membros do grupo. A desigualdade declara que x deve ser menor que 5 (não menor *ou igual a* 5) e maior que -1 (não maior que *ou igual a* -1). Como os limites são excluídos, use parênteses em torno de cada um

em uma resposta de $(-1,5)$, um *intervalo aberto*.

b. $3 \leq y \leq 10$

Solução: Desta vez, os limites são incluídos, indicando um intervalo *fechado*, então use colchetes $[3,10]$.

c. $9 > p \geq -2$

Essa desigualdade é escrita

primeiro com o limite maior.

Lembre-se de que a notação de

Fale a Linguagem

intervalos requer primeiro o

Um intervalo com dois

limite menor, então -2 deve estar

parênteses é denominado **intervalo**

antes de 9. Além disso, observe

aberto. Se houver dois colchetes,

que -2 está incluído no intervalo

o intervalo é considerado **fechado**.

(já que o sinal perto dele contém

Contudo, se houver somente um

a expressão “ou igual a”) e, desse

parêntese e um colchete, pode ser

modo, merece um colchete. O

denominado tanto intervalo **meio**

limite maior, 9, tem somente um

aberto como **meio fechado**.

parêntese: $[-2,9)$.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 23

22/05/2014 14:50:47

24

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

d. $x > 3$

O limite menor fica claro aqui; não é possível ir além de 3. Ainda assim, não há limite finito acima, então, use ∞ (infinito). Note que você *deve* usar um parêntese perto de um limite infinito, já que um dos requisitos de um colchete é que o número seja finito $(3, \infty)$.

e. $p \leq -9$.

Desta vez, o limite finito maior fica óbvio (-9) e está incluído no intervalo.

Agora o intervalo menor é infinito, então se escreve $-\infty$: $(-\infty, -9]$. Observe que um limite infinito é sempre negativo quando é o limite menor de um intervalo e sempre positivo quando é o limite maior.

Você Tem Problemas

Problema 4: Reescreva as notações de intervalos a seguir:

a. $y \geq -1$

b. $9 < z \leq 13$

c. $x \neq 4$ (dica: requer dois intervalos)

Desigualdades Têm Gosto de Frango

Se você consegue resolver uma equação, você consegue resolver uma desigualdade.

Elas têm praticamente os mesmos comportamentos, cheiros, sensações e gostos.

Mas lembre-se de uma coisa: se você multiplicar ou dividir ambos os lados de uma desigualdade por um número negativo, deve inverter o sinal de desigualdade. Com isso, quero dizer mudar $<$ para $>$, ou

mudar $\geq$ para $\leq$. A possibilidade de igualdade não será modificada (então $<$ não vai se tornar $\geq$), só a direção do sinal de desigualdade será modificada.

Exemplo 5: Resolva a desigualdade e represente a solução graficamente: $2(y - 4) + 1 > 4y - 5$.

Solução: Distribua o 2 pelos parênteses e simplifique.

$$2y - 8 + 1 > 4y - 5$$

$$2y - 7 > 4y - 5$$

É muito importante mover os termos da variável para o lado esquerdo da desigualdade e empurrar todo o resto para o lado direito. Neste problema, isso significa subtrair $4y$ e adicionar 7 a ambos os lados da desigualdade. É basicamente o mesmo que você faria se o sinal de $>$ fosse um sinal de $=$.

$$-2y > 2$$

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 24

22/05/2014 14:50:48

Capítulo 2: Equações e Desigualdades

25

Divida ambos os lados por -2 , lembrando-se de inverter o sinal de desigualdade: $y < -1$

A representação gráfica dessa desigualdade é bem fácil. Comece com uma linha de números e marque a constante com um ponto vazado ou cheio. (Os sinais de desigualdade $\leq$ e $\geq$ se transformam em pontos cheios, pois revelam como os números perto deles devem ser incluídos como parte do gráfico. Os sinais de $>$ e $<$, por outro lado, requerem pontos vazados.) Finalmente, desenhe uma linha escura apontando para a esquerda, como na Figura 2.2

Figura 2.2

Qualquer número menor que -1 , ao ser substituído por y , tornará a desigualdade $2(y - 4) + 1 > 4y - 5$

verdadeira.

Você Tem Problemas

Problema 5: Resolva a desigualdade e represente graficamente a solução: $5y \leq 9(y + 2)$ **Desigualdades com Valores Absolutos**

As desigualdades de valores absolutos são divas do mundo da matemática. Vocês dois se dariam bem sem terem que fazer muito esforço (“Ei, elas se comportam quase como equações. Consigo lembrar de inverter o sinal de desigualdade de vez em quando, sem problemas!”) Contudo, aparentemente, durante a noite, elas mudaram completamente. Agora, só bebem certos tipos de água a temperaturas muito específicas e se recusam a comer qualquer coisa além de M&Ms amarelos (Adivinhe quem tem que abrir o saco e separá-los? Correto, é você!) Quando o assunto é matemática, essas divas requerem duas técnicas de solução completamente diferentes, uma para cada modo – dependendo para onde o sinal de desigualdade pode apontar.

Desigualdades do Tipo Menor Que

Se uma desigualdade de valor absoluto contém um sinal de $<$ ou $\leq$, será necessário criar uma *desigualdade composta* para resolvê-la. Isso significa que, em vez de uma constante e um sinal de desigualdade, agora você tem dois de cada. Estas são as etapas específicas que devem ser seguidas: PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 25

22/05/2014 14:50:48



Fale a Linguagem

1. Isole a expressão de valor absoluto no

Uma **desigualdade**

lado esquerdo da desigualdade. Você

composta tem dois limites em torno

precisa chegar a algo deste tipo: $|ax + b| < c$, de uma expressão com variável: a

onde a , b e c são números reais.

$< x < b$. Isso pode ser lido como

2. Reescreva como uma desigualdade

“ a é menor que x , que é menor que

composta, removendo os sinais

b ” ou “ x está entre a e b ”. Também **de valores absolutos**. Transforme a

é possível escrever $a < x < b$ em desigualdade $|ax + b| < c$ em $-c < ax + b < c$.

notação de intervalos (a, b) .

E, deste modo: retire as barras dos valores

absolutos, adicione o sinal de desigualdade

correspondente do lado esquerdo, então,

à esquerda dele escreva o oposto da

constante original.

3. Resolva a desigualdade composta de x . Não esqueça que é necessário adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir *todas as três* partes da desigualdade composta.

Caso você esteja um pouco confuso com essas etapas, veja aqui um exemplo para ajudá-lo a clarear suas ideias.

Exemplo 6: Resolva a desigualdade e represente graficamente sua solução:

.

Solução: Subtraia 5 de ambos os lados da

Ponto Crítico

desigualdade para isolar os valores absolutos

Algumas pessoas preferem

. Agora, reescreva isso como uma

representar desigualdades

desigualdade composta, colocando o oposto de 8

graficamente, usando parênteses

(que, é claro, é -8) e outro símbolo $\leq$ à esquerda

e colchetes na reta numérica

da desigualdade: $-8 \leq 3x - 2 \leq 8$. (Não esqueça de

em vez de pontos de aberto e

retirar as barras de valores absolutos também.)

fechado, pois isso faz com que

Para a resolução de x , é necessário adicionar 2

os gráficos fiquem mais parecidos com

a todas as três partes da desigualdade e, então,

a notação de intervalo. Por exemplo,

dividir todas por 3.

a Figura 2.3 poderia ter um $[$ em -2 e

um $]$ em $10/3$, em vez dos pontos.

O gráfico de uma desigualdade composta consiste em dois pontos

marcando os pontos finais (lembre-se de usar pontos cheios somente se a desigualdade contiver

“ou igual a”; de outro modo, use pontos vazados) e marque o segmento de reta que conecta esses pontos, como na Figura 2.3.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 26

22/05/2014 14:50:50

Capítulo 2: Equações e Desigualdades

27

Figura 2.3

O gráfico de soluções possíveis para o Exemplo 6: qualquer número no intervalo fechado $[-2, 10]$

2 10

,

3]|

tornará a desigualdade

verdadeira.

Desigualdades do Tipo Maior Que

A solução para uma desigualdade de valor absoluto que contém $>$ ou $\geq$ consiste em dois intervalos separados e não sobrepostos. Qualquer número em qualquer desses intervalos é uma solução possível. Veja aqui como enfrentar esses problemas comuns às divas.

1. Isole a expressão de valor absoluto no lado esquerdo da desigualdade.

Essa é a mesma regra inicial que você tinha que seguir em desigualdades

“menores que”.

2. Escreva duas desigualdades de valor não absoluto separadas com base na original. A primeira é fácil: só retire as barras de valores absolutos. Para obter a outra, inverta o sinal de desigualdade e pegue o oposto da constante.

(Para ser matematicamente preciso, é necessário escrever sempre *ou* entre as duas desigualdades.) Desse modo, $ax + b \geq c$ seria reescrito como $ax + b \geq c$ ou $ax + b \leq -c$.

3. Resolva as desigualdades separadamente, mas represente-as graficamente na mesma reta numérica. Mesmo que os gráficos combinados fiquem parecendo com dois braços, está correto.

Assim como sua contraparte “menor que”, as desigualdades de valor absoluto

“maior que” precisam ter suas expressões completamente reescritas antes que você possa começar a resolvê-las.

Exemplo 7: Resolva a desigualdade e represente graficamente sua solução:

.

Solução: Para isolar as barras de valores absolutos, é necessário dividir ambos os lados por 2; você acabará chegando a

. Reescreva isso como duas

desigualdades de valores não absolutos e resolva-as.

$$x + 1 > 3$$

ou

$$x + 1 < -3$$

$$x > 2$$

ou

$$x < -4$$

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

Qualquer número maior que (mas não igual a) 2 torna a desigualdade original verdadeira, assim como qualquer número menor que (mas não igual a) -4 . Desenhe os gráficos de $x > 2$ e $x < -4$ na linha dos mesmos números para obter o gráfico com a solução completa da desigualdade original $2|x + 1| > 6$, ilustrada na Figura 2.4.

Figura 2.4

Gráfico de soluções possíveis da desigualdade $2|x + 1| > 6$.

Você Tem Problemas

Problema 6: Resolva e represente graficamente as desigualdades.

a.

b.

O Mínimo que Você Precisa Saber

É possível escrever a equação de uma reta, dados somente sua inclinação e um de seus pontos.

As retas podem ser escritas nas formas de ponto-coeficiente angular, intercepto-coeficiente angular ou padrão.

As desigualdades sem valores absolutos são facilmente resolvidas, mas, se os valores absolutos estiverem presentes, primeiro é necessário reescrever a desigualdade como duas desigualdades mais simples antes da resolução.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 28

22/05/2014 14:50:53

Capítulo 3

Praticando com Polinômios

Neste Capítulo:

Descrição e classificação dos polinômios

Operações básicas com polinômios

Divisão sintética e longa

Trabalhando com números complexos

O pessoal da matemática adora definições. Mais até do que as pessoas que ganham a vida com a literatura. Nunca entendi por que professores de matemática fornecem definições tão cuidadosas e concisas das coisas que ensinam, quando quase ninguém entende o que eles estão dizendo.

Pegue, por exemplo, o conceito de *polinômio*. Que diabos é isso? Talvez esta definição ajude a entender: polinômio é uma expressão da forma $a x^n + a x^{n-1} + a x^{n-2} + \dots + a x + a$, em que n é um número inteiro finito e a 0

1

2

$n-1$

n

k

(para qualquer inteiro k de modo que $0 \leq k \leq n$) é um número real. Essa definição não é somente a menos útil de todos os tempos como provavelmente também é uma definição que só serve para deixar você mais confuso(a).

Por enquanto, pense em um polinômio como um ou mais aglomerados

de coisas (chamadas *termos*) somados ou subtraídos uns dos outros. Esses aglomerados são compostos por números (denominados coeficientes) e variáveis (que são frequentemente elevadas a expoentes de números naturais) multiplicados.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 29

22/05/2014 14:50:53



30

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

Isso é tudo que você realmente precisa saber. Haverá muito tempo para aprender a definição rigorosa, caso você deseje tornar-se um *nerd* da matemática como eu (com todas as suas alturas estonteantes, quedas livres e mais exercícios para você balançar o seu lápis).

Classificação de Polinômios

No Capítulo 1, revisei parte do vocabulário básico para que você soubesse o que é um número inteiro e o que torna um número racional ou irracional. Você percebeu quanto tempo isso já nos poupou? Agora, quando eu digo *inteiro*, você sabe a que estou me referindo, um número como 7 ou -5 , mas não 3,12598. Quando falamos a mesma língua, fazemos muita economia de tempo. Imagine se eu tivesse que escrever “ x tem que ser um número que pode ser expresso em forma de fração ou de decimal que se repete ou acaba” em vez de “ x também é racional”? Sou muito ocupado para ficar redefinindo esses termos a cada cinco minutos, tenho muito o que fazer. Tenho certeza de que *Star Trek* deve estar passando em algum canal da TV.

Os polinômios podem ser categorizados tão facilmente quanto os números, sendo útil e econômico saber como fazer isso. Tecnicamente, há dois modos diferentes de classificar polinômios. O primeiro método

tem por base a quantidade de termos que ele possui. Conte quantos agrupamentos não-nulos um polinômio possui e descreva-o usando o termo adequado da Tabela 3.1

Tabela 3.1 Classificações de Polinômios com Base no

Número de Termos

Número de Termos

Classificação

Exemplo

1

Monômio

$2y + 4$

2

Binômio

$9x - 1$

3

Trinômio

$x^7 + 12x + 5$

Ponto Crítico

Infelizmente essa técnica é útil somente na

Se um polinômio tiver mais de

margem. Quando um polinômio tem quatro ou

uma variável, encontre o grau

mais termos, não há apelidos para ele; nesse

adicionando as potências em

caso, usa-se a descrição genérica *polinômio*. É por

cada termo e pegando a maior
isso que um segundo esquema de classificação é
soma. Por exemplo, o grau de
necessário. É baseado não no número de termos,
 $2x^3y^4 - 9x^2y^6$ é 8 porque $2 + 6$
mas no maior expoente (chamado de *grau*) do
(a soma dos expoentes no segundo
polinômio, conforme ilustrado na Tabela 3.2.
termo) é 8, o que excede a soma dos
expoentes 7 do primeiro termo.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 30

22/05/2014 14:50:53

Capítulo 3: Praticando com Polinômios

31

Tabela 3.2 Classificação de Polinômios com Base no Grau

Grau

Classificação

Exemplo

0

Constante

$5x^0$ ou 5

1

Linear

$2x^1 - 1$ ou $2x - 1$

2

Quadrático

$$4x^2 + x - 25$$

3

Cúbico

$$x^3 - 8$$

4

Quártico

$$3x^4 - x - 1$$

5

Quíntico

$$3x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 2$$

Mais uma vez, há um limite maior aqui. Outras classificações descrevem polinômios com potências maiores que 5, mas não são usadas normalmente. Mesmo assim, com este esquema e o esquema de classificação da Tabela 3.1, você será capaz de descrever a grande maioria dos polinômios que surgirem no seu caminho.

Você Tem Problemas

Problema 1: Classifique os polinômios com o máximo possível de precisão.

a. $8x^3$

b. $3x^2 - 2x + 5$

c. $7x - 3$

Adição e Subtração de Polinômios

Se eu desse a você duas porções de frango frito, cada uma com vários pedaços, e pedisse para acrescentar o que falta, o que você faria? Vamos supor, em favor do argumento, que você não é vegetariano, adora porções de frango e saboreia de verdade questões

importantíssimas como “Ei, quanto você tem de galinha aí?” — mesmo que, provavelmente, ninguém costume fazer essa pergunta a você.

Para definir o total de pedaços de frango com precisão, seria necessário abrir dos pacotes e classificar cada pedaço. Quando terminar a primeira porção, talvez descubra que tem quatro peitos, três asas e cinco coxas (**nas porções**, caso contrário, chame um médico imediatamente). Se a segunda porção contiver dois peitos, sete asas, três coxas e uma quantidade aleatória de bicos, isso significa que tem o grande total de: PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 31

22/05/2014 14:50:54



32

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

$(4 + 2)$ peitos + $(3 + 7)$ asas + $(5 + 3)$ coxas + 1 bico

$= 6$ peitos + 10 asas + 8 coxas + 1 bico

Seu instinto natural é classificar as porções em pedaços semelhantes e agrupá-

las. Não faria muito sentido adicionar três asas do primeiro grupo a três coxas do segundo grupo e anunciar que tem um total de 6 “coxasas”, não é? Não, você só coloca as coisas juntas quando são semelhantes.

O mesmo se segue em relação à adição e à subtração de polinômios. (É hora de voltarmos à

Fale a Linguagem

matemática, pois há muito para escrever sobre

Dois termos de

a soma de frangos antes de dedicar um livro

polinômios com variáveis

inteiro sobre o assunto, e não estou preparado

combinadas são denominados

para isto.) Assim como você classificou os

termos semelhantes e podem

pedaços de frango anatomicamente e os

ser somados (ou subtraídos) um

agrupou por partes, é possível agrupar os

do outro. Por exemplo, $5x^3y^2$ e

termos de um polinômio e agrupá-los de acordo

$-9x^3y^2$, porque suas variáveis, x^3y^2 , com as variáveis encontradas. Aqui está o

combinam-se perfeitamente. Assim,

segredo: é possível agrupar dois termos com

$$5x^3y^2 + (-9x^3y^2) = -4x^3y^2.$$

variáveis *somente se tiverem* termos semelhantes,

o que significa que eles têm variáveis que se

combinam perfeitamente, incluindo seus graus.

Exemplo 1: Simplifique a expressão combinando os termos semelhantes: $(x^3 + 6x^2 - 3x + 4) - 2x(x^2 + 8x - 5)$ **Solução:** Comece distribuindo $-2x$ pelo segundo conjunto de parênteses. Lembre-se de adicionar os expoentes ao multiplicar as expressões contendo variáveis com a mesma base (então, $-2x \cdot x^2 = -2 \cdot x^1 + 2 = -2x^3$).

$x^3 + 6x^2 - 3x + 4 - 2x^3 - 16x^2 + 10x$ De acordo com a propriedade comutativa da adição, é possível mover os termos semelhantes para que fiquem próximos um do outro (assim como você

moveria os pedaços de frango combinados para seus grupos).

$$x^3 - 2x^3 + 6x^2 - 16x^2 - 3x + 10x + 4$$

Agora, combine os termos semelhantes.

$$x^3 - 2x^3 = -x^3$$

$$6x^2 - 16x^2 = -10x^2$$

$$-3x + 10x = 7x$$

$$4 + 0 = 4$$

A resposta final é a soma de todos os resultados dos termos semelhantes:

$$-x^3 - 10x^2 + 7x + 4$$

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 32

22/05/2014 14:50:55

Capítulo 3: Praticando com Polinômios

33

Você Tem Problemas

Problema 2: Simplifique a expressão: $x(4x - 3y + 1) + 5y(-2x + y + 2)$.

Multiplicação de Polinômios

O erro algébrico mais comum de todos os tempos é o da multiplicação incorreta de binômios. Digamos que você tenha que multiplicar $(a + b)(x + y)$. Qual é a resposta?

Se você disse $ax + by$, então é mais uma vítima desse trágico engano aritmético.

Não se preocupe, deve haver algum grupo de apoio em sua região para ajudá-lo a lidar com a confusão e a dor. Recomendo a organização sem fins lucrativos *Sempre Equivocados com Produtos de Polinômios (SEPP)*.

Para ajudar a vencer essa epidemia, a maioria dos professores de

álgebra apresenta a técnica do PEIU, um truque para ajudar a lembrar como multiplicar dois binômios adequadamente. O nome PEIU é um acrônimo que se refere a quatro palavras: primeiros, externos, internos e últimos todos os pares de coisas do problema que você precisa multiplicar. No produto de $(a + b)(x + y)$ estão os pares aos quais PEIU se refere:

Primeiros: primeiros termos de cada binômio (a e x)

Externos: termo da esquerda do primeiro binômio e termo da direita do segundo binômio (a e y)

Internos: termo da direita do primeiro binômio e termo da esquerda do segundo binômio (b e x)

Últimos: últimos termos de cada binômio (b e y) Para calcular o produto de $(a + b)(x + y)$, multiplique cada par de números que acabei de escrever e adicione o resultado: $ax + ay + bx + by$

Isso é muito diferente daquela resposta $ax + by$ errada, não é? Claro que isso é parte da resposta, mas há dois termos adicionais inteiros aqui. Observe que admirável trabalho a técnica PEIU está realizando – menos um SEPP no mundo.

Só há um problema: a técnica PEIU não funciona, a menos que você esteja multiplicando binômios. Embora isso não fosse muito difícil em álgebra (a maioria das multiplicações envolvendo polinômios que você fez até então envolvia somente binômios), é necessário saber multiplicar os outros polinômios também. Você vai usar um método que eu chamo de “distribuição estendida”. A boa notícia é que não é muito difícil e pode ser usado para multiplicar *quaisquer* dois polinômios.



34

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

A multiplicação estendida é reduzida a esta

Ponto Crítico

regra de ouro: multiplique cada termo do

Embora o processo de

polinômio à esquerda (um de cada vez) por cada

distribuição estendida seja

termo do polinômio à direita. Repita isso com

uma prática comum, não há

cada termo do polinômio à esquerda e, então,

nome comumente aceito para

some todos os produtos que você obteve.

ele, razão pela qual uso um

nome escolhido por mim. Ao usá-lo,

Exemplo 2: Multiplique os polinômios e

certifique-se de mostrar seu trabalho

expresse a resposta de forma simplificada.

em vez de correr até a resposta

a. $(2x - y)(x + 5y)$

e escrever “Eu fiz isso usando a

distribuição estendida”, pois seu

Multiplique o primeiro termo do binômio

professor não faz ideia do que

à esquerda $(2x)$ por cada termo do

seja isso.

binômio à direita.

$2x(x) + 2x(5y) = 2x^2 + 10xy$ Agora faça o mesmo com o termo restante do binômio à esquerda.

$$(-y)(x) + (-y)(5y) = -xy - 5y^2$$

Some os resultados e simplifique.

Esse é o mesmo resultado obtido com o método PEIU.

b. $(x - 3)(x^2 - 2x + 1)$

Distribua primeiro o x e então o -3 do polinômio à esquerda por cada termo do polinômio à direita.

$$\begin{aligned} x(x^2) + x(-2x) + x(1) + (-3)(x^2) + (-3)(-2x) + (-3)(1) \\ = x^3 - 2x^2 + x - 3x^2 + 6x - 3 \end{aligned}$$

Lembre-se de combinar os termos semelhantes.

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

Você Tem Problemas

Problema 3: Calcule o produto e simplifique: $(-2a + 5b)(a^2 + 7ab - 4b^2)$.



Capítulo 3: Praticando com Polinômios

35

Divisão Longa de Polinômios

Quando fui apresentado à divisão longa, na quinta série, fiquei um pouco intimidado. Esta técnica era tão peculiar que pedia o seu próprio símbolo, uma grande linha horizontal com uma barra vertical à sua esquerda. Levei um tempo para entender não somente o que deveria fazer, mas também para saber onde deveria escrever as coisas.

A divisão longa de polinômios funciona quase do mesmo modo que a divisão de números inteiros. Então, o que estou a ponto de revisar com você será, provavelmente, vagamente familiar. Ainda assim, de todas as operações com polinômios, os estudantes costumam achar a divisão a mais difícil. Então, em vez de simplesmente listar os passos a serem seguidos e então fazer um exemplo, farei um exemplo primeiro e listarei as etapas, conforme seguir adiante. Desse jeito, posso explicar melhor, no contexto de um problema, para que faça mais sentido.

Exemplo 3: Calcule o quociente: $(2x^3 - x^2 + 5) \div (x^2 + 3x - 1)$.

Solução: A primeira coisa a ser feita é reescrever o problema de modo que o *dividendo* fique à esquerda e o divisor fique dentro do símbolo da divisão longa, também chamado de chave: $2x^3 - x^2$

$+ 5x^2 + 3x - 1$. Certifique-se de escrever ambos nas potências decrescentes de x .

Você deve ter percebido que o dividendo

está sem um termo x . Ele tem um

termo na terceira potência e um na

Fale a Linguagem

segunda potência, mas vai direto

para uma constante 5 (um termo com

A divisão $a \div b$ pode

x na potência 0, se você lembra das

ser reescrita como $a \cdot b^{-1}$; b^{-1} é

classificações do início do capítulo).

chamado de **divisor** e a é chamado

Muito da divisão longa depende do fato

de **dividendo**.

de onde as coisas são colocadas, pois

você *precisa* adicionar um marcador de posição para o termo de x ausente: $0x$. Você está somente adicionando o zero, então, o valor do dividendo não muda (lembre-se de que zero é a identidade aditiva). Você precisaria fazer o mesmo se o divisor também tivesse termos de x ausentes.

$$2x^3 - x^2 + 0x + 5x^2 + 3x - 1$$

A estrutura está completa. Agora pergunte a si mesmo: “Pelo que devo multiplicar x^2 para obter $2x^3$?”. Em outras palavras, imagine por qual item multiplicar o termo mais à esquerda no divisor para obter o termo mais à esquerda no dividendo. Como $x^2 \cdot 2x = 2x^3$, a resposta à pergunta que você fez a si mesmo é $2x$. Escreva isso abaixo do termo semelhante no divisor.

$$2x^3 - x^2 + 0x + 5x^2 + 3x - 1$$

$$2x$$

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 35

22/05/2014 14:51:01



36

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

Multiplique o $2x$ por cada termo no divisor. Aqui está o truque: coloque o *oposto* de cada resultado abaixo de seu termo semelhante no dividendo. Por exemplo, $2x \cdot 3x = 6x^2$, então escreva o oposto ($-6x^2$) abaixo de seu termo semelhante no dividendo ($-x^2$). Combine os termos semelhantes e, quando estiver pronto, coloque o próximo termo no dividendo (a constante 5) para baixo, para que se junte com os termos recém combinados.

$$2x^3 - x^2 + 0x + 5x^2 + 3x - 1$$

$$-2x^3 - 6x^2 + 2x \cdot 2x$$

$$-7x^2 + 2x + 5$$

A questão a ser formulada agora é: “Por qual valor x^2 deve ser multiplicado (ainda o termo mais à esquerda no divisor) para obter $-7x^2$

Ponto Crítico

(o termo mais à esquerda do problema)?”.

Os opostos do produto são

A resposta é -7 , e é (como a última resposta

escritos abaixo do sinal de

desse tipo) escrita abaixo de seu termo

divisão, pois, tecnicamente, você

semelhante no símbolo de divisão. Repita

os está subtraindo.

o processo de multiplicá-lo por cada termo

no divisor, escrevendo os opostos abaixo e,

então, combinando os termos semelhantes,

maravilhosamente empilhados.

$$2x^3 - x^2 + 0x + 5x^2 + 3x - 1$$

$$-2x^3 - 6x^2 + 2x \quad 2x - 7$$

$$-7x^2 + 2x + 5$$

$$7x^2 + 21 - 7$$

$$23x - 2$$

Como não há mais termos no dividendo a serem “jogados fora” (como você fez com o 5, anteriormente), você sabe que terminou a divisão. A expressão abaixo da chave é o quociente e a linha mais inferior é o resto. Sua resposta final é o quociente mais a fração na qual o numerador é o resto e o denominador é o divisor: $2x - 7 + \frac{23x - 2}{x^2 + 3x - 1}$

$$x^2 + 3x - 1$$

Você sempre pode verificar seu trabalho multiplicando o quociente pelo divisor e somando o resto; você deve obter o dividendo original.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 36

22/05/2014 14:51:04



Capítulo 3: Praticando com Polinômios

37

(quociente)(divisor) + (resto) = (dividendo)

$$(2x - 7)(x^2 + 3x - 1) + (23x - 2) = 2x^3 - x^2 + 5$$

$$2x^3 - x^2 - 23x + 7 + (23x - 2) = 2x^3 - x^2 + 5$$

$$2x^3 - x^2 + 5 = 2x^3 - x^2 + 5$$

Você Tem Problemas

Problema 4: Calcule o quociente: $(x^3 - 9x - 4) \div (x - 3)$.

Divisão Sintética

Agora que você entendeu a divisão longa (espero que tenha entendido mesmo), posso ser totalmente honesto com você: eu realmente não gosto dela. Há muito a lembrar: trocar os sinais na hora certa, o momento de escrever os números acima do símbolo de divisão e quando eles vão para baixo, garantindo que você “jogue fora”

outro termo do dividendo de cada vez. Qualquer pequeno erro em alguma dessas etapas significa que todo o problema ficará errado.

Bem, não adianta reclamar, a não ser que haja um jeito melhor. Certo? A boa notícia é que há: *divisão sintética*, um método de atalho que pode ser usado para dividir qualquer tipo de polinômio por um binômio linear. A divisão sintética calcula o quociente do dividendo de um polinômio e um divisor de binômio da forma $x + a$, usando somente os coeficientes e as constantes das expressões. Como as variáveis não são necessárias, o processo é mais fácil e rápido (o divisor deve estar na forma $x + a$, em que a é um número racional

positivo ou negativo).

Alerta do Kelley

A divisão sintética só funciona se o divisor for um binômio linear que se parece com $x + a$ (embora a pudesse ser negativo). Se você tiver um divisor como $4x + 3$, divida ambos os termos pelo coeficiente de x para que fique na forma que você precisa para a divisão sintética. Em outras palavras, . Isso indica que você

deve reescrever o divisor $4x + 3$ como

.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 37

22/05/2014 14:51:05

38

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

Exemplo 4: Calcule $(2x^3 - x + 3) \div (x + 4)$.

Solução: Escreva o *oposto* da constante do divisor em um pequeno quadro (neste problema, a constante do divisor é 4, então você escreve -4 no quadro). Depois, liste todos os coeficientes do dividendo em ordem, da potência mais alta de x até a mais baixa. Se houver expoentes de x faltando, certifique-se de inserir um marcador de posição de 0. Neste caso, $2x^3 - x + 3$ não tem o termo x^2 , então, pense nisso como $2x^3 + 0x^2 - x + 3$ quando você listar esses coeficientes.

Deixe algum espaço abaixo dessa linha de números e, então, desenhe uma linha horizontal. Abaixo dela, reescreva o coeficiente mais à esquerda. Você deverá obter o resultado a seguir:

-4

$2 \ 0 \ -1 \ 3$

2

Multiplique o número do quadro pelo 2 abaixo da linha ($-4 \cdot 2 = -8$), e escreva o resultado abaixo do 0. Então, some a coluna ($0 + (-8) = -8$) e então escreva o resultado abaixo, depois da linha.

$$-4$$

$$2$$

$$0 - 1 \ 3$$

$$-8$$

$$2 - 8$$

Continue repetindo esse processo: multiplique o número do quadro pelo número mais à direita abaixo da linha, escreva o resultado acima da linha na coluna imediatamente à direita e some os números na coluna, escrevendo o resultado abaixo da linha. Repita até que não haja mais espaços em branco abaixo da linha original de coeficientes.

$$-4$$

$$2$$

$$0 - 1$$

$$3$$

$$-8 \ 32 - 124$$

$$2 - 8 \ 31 - 121$$

Todos os números abaixo da linha (exceto o final à direita) são os coeficientes do quociente; o último número é o resto. Sua resposta, é claro, precisa ter variáveis e o grau de seu quociente será exatamente um grau menor que o grau de seu dividendo original. Como $2x^3 - x + 3$ tem grau 3 (já que seu expoente mais alto é 3), o quociente deve começar com x em uma potência de 2.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 38

22/05/2014 14:51:06



Capítulo 3: Praticando com Polinômios

Mais uma vez, o resto é adicionado no final, como o numerador de uma fração da qual o denominador é o divisor original. Neste problema (já que o resto é negativo), também é correto escrever ; você tem a permissão para mover

o sinal negativo na frente do resto. Se quiser, verifique sua resposta como fez com a divisão longa:

$$(\text{quociente})(\text{divisor}) + (\text{resto}) = (\text{dividendo})$$

Você Tem Problemas

Problema 5: Use a divisão sintética para calcular $(x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 5) \div (x - 2)$.

Números Complexos

No Capítulo 1, reapresentei a você o incrível pequeno número

(referindo-me

a números complexos). Como uma formiga (que é supostamente capaz de levantar seu peso corporal centenas de vezes sem derramar uma gota do seu suor), i é só uma letrinha, mas ajuda a fazer coisas incríveis, como simplificar radicais negativos.

Vamos dizer que você tenha a expressão com radical

. Para simplificar,

primeiro reescreva-a como

(apague esse sinal negativo causador de

problemas dentro do radical e coloque um i na frente). Agora que o radical é positivo, você não deve ter problemas em simplificar para acabar chegando em

, ou

". Como a resposta final contém um i , ele é chamado de *número imaginário*.

Se você relembrar o Capítulo 1, um

número complexo ocorre somando um

Fale a Linguagem

número real a um número imaginário:

É possível identificar um

$a + bi$. Você provavelmente não

número imaginário (como $-5i$

será solicitado a fazer nada além de

ou

) porque ele contém um i ,

adicionar, subtrair, multiplicar e dividir

que é conhecido como tendo o valor

números complexos em pré-cálculo.

de -1 . Os números imaginários

Então, vamos nos certificar de que você

são parte essencial dos números

sabe exatamente como fazer isso. Em

complexos, que contém uma parte

grande parte, eles se comportam como

de número real e uma parte de

binômios (que, caso você esteja curioso,

número imaginário.

é o motivo pelo qual foram colocados

neste capítulo, mesmo que tecnicamente não sejam binômios).



40

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

Exemplo 5: Simplifique as expressões complexas:

a. $3(2 - 4i) - 5(1 + 7i)$

Não considere que a variável na expressão seja i em vez de x ; você distribuirá exatamente do mesmo modo:

$$\begin{aligned} 3(2) + 3(-4i) + (-5)(1) + (-5)(7i) \\ = 6 - 12i - 5 - 35i \end{aligned}$$

Os números 6 e -5 são termos semelhantes, como $-12i$ e $-35i$; então, combine-os para obter $1 - 47i$.

b. $(4 - 2i)(-5 + 3i)$

Use o método PEIU ou a distribuição estendida para multiplicar.

$$-20 + 12i + 10i - 6i^2$$

Se

, então

. Assim, $i^2 = -1$. Substitua i^2 por -1 e simplifique:

$$-20 + 12i + 10i - 6(-1) = -14 + 22i.$$

c. $(4 + 9i) \div (-3 - 6i)$

Reescreva em forma de fração (o primeiro número complexo é o numerador e o segundo é o denominador), e multiplique a parte superior e inferior da fração *pelo conjugado* do denominador, que é $-3 + 6i$.

É possível simplificar mais dividindo tudo

pelo fator comum 3 para obter

. Seu

Fale a Linguagem

O **conjugado** de $a + bi$

professor pode querer que você escreva isso na

é $a - bi$ e vice-versa, só mude o sinal

forma de número complexo oficial $a + bi$, que

entre os termos.

seria

.

Você Tem Problemas

Problema 6: Se $c = 1 - 6i$ e $d = 4 + 3i$, calcule $c + d$, $c - d$, $c \cdot d$ e $c \div d$.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 40

22/05/2014 14:51:10

Capítulo 3: Praticando com Polinômios

41

O Mínimo que Você Precisa Saber

Polinômios são compostos de grupos denominados termos, que contêm coeficientes e variáveis elevados a potências.

É possível adicionar ou subtrair somente termos semelhantes em um polinômio que contém exatamente as mesmas variáveis.

Enquanto a divisão longa permite calcular o quociente de quaisquer dois polinômios, a divisão sintética requer que o divisor seja um binômio linear da forma $x + a$ ou $x - a$.

Os números complexos são muito semelhantes aos binômios porque são governados por regras e restrições semelhantes.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 41

22/05/2014 14:51:10

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 42

22/05/2014 14:51:10

Capítulo4

Fatoração de Polinômios

Neste Capítulo:

Reconhecimento do máximo divisor comum

Fatoração de monômios e binômios

Padrões de fatoração comum para memorizar

Transformação de trinômios em produtos de binômios

Agora que você está sabendo multiplicar polinômios, vejamos se sabe como

“desmultiplicá-los”. É disso que se trata o processo de *fatoração*. No Capítulo 3, você aprendeu a transformar $(x - 3)(2x + 1)$ em $2x^2 - 5x - 3$. Agora, neste capítulo, terá que fazer o inverso, transformando $2x^2 - 5x - 3$ de volta em $(x - 3)(2x + 1)$. Sim, pode parecer fácil fazer isso agora, mas fica um pouco mais

complicado quando eu não forneço a resposta a você de antemão.

Claro, o jeito mais fácil de fatorar um polinômio seria, em primeiro lugar, não multiplicar as partes que o compõem. Infelizmente, as máquinas do tempo ainda precisam ser inventadas — e você não tem poder para voar pelo mundo tão rápido a ponto de fazer a Terra girar de volta para trás e reverter o tempo, salvando Lois Lane de morrer na hora errada em *Super-Homem II*. Então, você ainda precisa aprender a fatorar — ou isso ou precisará inventar uma máquina do tempo. (Você faria de tudo para evitar ter de revisar álgebra, não?)

PF_CG_TCIG_Pre-Calculus.indb 43

22/05/2014 14:51:10



44

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

Máximo Divisor Comum

Lembra como se faz para descobrir o máximo divisor comum de dois números inteiros? Você provavelmente aprendeu a fazer isso há muito tempo, em sua primeira aula de álgebra, mas já esqueceu como é — ou internalizou o modo de fazer e consegue fornecer respostas sem, de fato, explicar como. De qualquer modo, vale a pena parar um minuto e revisar como se faz para descobrir o misterioso máximo divisor comum (MDC).

Descobrimo o Máximo Divisor Comum de Números Inteiros

Em primeiro lugar, é necessário saber o que é um *fator*. Basicamente, é o número que pode ser inteiramente dividido por outro (quando digo “inteiramente”, quero dizer que a resposta será um número inteiro). Por exemplo, 5 é um fator de 10, já que 10 pode ser inteiramente dividido por 5 (o quociente de $10 \div 5$ é igual a 2, que é um amável número inteiro, não uma fração). Por outro lado, 4 não é um fator de 10 porque $10 \div 4$

= 2, que é um número racional, mas não é inteiro. Agora que

você tem a terminologia sob seu domínio, está pronto para descobrir o máximo divisor comum.

Exemplo 1: Qual é o máximo divisor comum de

Fale a Linguagem

32 e 80?

Se a é um **fator** de b ,

Solução: Seu objetivo é dividir cada número por seus

então o quociente de $b \div a$ terá um

fatores *primos*. É, de fato, bem fácil fazer isso: comece resto de 0, e é possível dizer que a

com o 32 e encontre quaisquer dois números que

“divide inteiramente” b . Se (como no

tenham esse produto. Eu escolherei $8 \cdot 4$ (você poderia

exemplo 1) a e b são somente inteiros,

ter escolhido também $16 \cdot 2$, mas obteria a mesma

então a é um fator de b se $b \div a$ resposta final).

resultar em um número inteiro. Os

únicos fatores de um número **primo**

são 1 e o próprio número.

Ponto Crítico

Os quadros com setas no Exemplo 1 são denominados árvores de fatores. Porque cada número gera dois galhos contendo dois fatores. Se algum desses números não for primo, ele também gerará outros galhos de fatores. Para obter a fatoração dos primos do número superior, multiplique todos os números que não têm galhos abaixo na árvore.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 44

22/05/2014 14:51:11

Capítulo 4: Fatoração de Polinômios

45

Como 8 e 4 não são números primos, reescreva-os como produtos de dois fatores, como foi feito com o 32 há pouco ($8 = 2 \cdot 4$ e $4 = 2 \cdot 2$).

O único número que resta na linha inferior ($4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$) que não é primo é o 4, então, divida-o em fatores também. Para dar mais atenção a eles, colocarei em quadros todos os números primos (de modo que não tenham setas apontando para cima, o que é bom, como você saberia se deitasse em uma cama de faquir).

Multiplique todos os números das caixas: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 25$; essa é a versão totalmente fatorada (fatoração de primos) de 32. Compare isso à fatoração de 80.

Assim, a fatoração dos números primos de 80 é $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 = 24 \cdot 5$.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 45

22/05/2014 14:51:12



Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

Para calcular o máximo divisor comum de 32 e 80, pegue o expoente mais baixo de cada fator comum. Neste caso, 32 e 80 têm somente um fator em comum: 2 (porque 32 contém 25 e 80 contém 24). O máximo divisor comum é 2 elevado à potência mais baixa: $2^4 = 16$. Se houvesse mais fatores em comum, você teria usado a potência com expoente mais baixo de cada um. (Tente o Problema 1 a seguir para ver um exemplo desse tipo.) O que isso tudo significa? Simplificando, como 16 é o máximo divisor comum de 32 e 80, é certo que ele é o número inteiro maior que pode ser dividido inteiramente por ambos os números.

Você Tem Problemas

Problema 1: Descubra o máximo divisor comum de 72 e 180.

Descobrimo o Máximo Divisor Comum de Polinômios

Depois de descobrir o máximo divisor comum de números inteiros, é fácil dar o próximo passo e descobrir o máximo divisor comum dos polinômios. De fato, a única diferença é que agora você terá de lidar com algumas variáveis adicionadas à mistura, mas a regra de ouro básica continua a mesma: encontre o máximo divisor comum mantendo a versão do expoente mais baixo de cada fator dividido.

Exemplo 2: Fatore o polinômio $15x^3y^2 - 45xy^4z$.

Solução: Comece calculando o máximo divisor comum dos coeficientes: eles são somente números inteiros, então, você pode usar as árvores de fatoração que mostrei a você na última seção. Você descobrirá que $3 \cdot 5 = 15$ é o número inteiro maior pelo qual ambos podem ser divididos. Agora é hora de continuar com as variáveis.

Das três variáveis no polinômio (x, y, z) somente x **Ponto Crítico**

e y são encontrados em ambos os termos, então

Se *cada* termo no polinômio que

z não é candidato a máximo divisor comum.

Se você está fatorando e é negativo,

Tome a potência mais baixa de x que você vê

é necessário fatorar $a - 1$ de

nos termos restantes (x , em vez de x^3) e faça o mesmo com cada um deles, como parte do

mesmo com y (use y^2 em vez de y^4). Esmague o máximo divisor comum.

peças (o número e os expoentes corretos de x e

y) para obter o máximo divisor comum de $15xy^2$.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 46

22/05/2014 14:51:12



Capítulo 4: Fatoração de Polinômios

47

Depois de saber qual é o máximo divisor comum, é necessário fatorá-lo em cada termo, escrevendo o polinômio na forma fatorada. Escreva o máximo divisor comum e, próximo a ele (entre parênteses), reescreva o polinômio com o máximo divisor comum dividindo cada

termo.

Como simplificar essas frações? As partes numéricas são fáceis — simplifique como faria com qualquer fração normal de seus tempos de pré-álgebra, ou seja, 45

$$15 \cdot 3 \cdot 3$$

$$=$$

$= 3$. Para simplificar as partes das variáveis, aplique a fórmula 15

$$15$$

$$1$$

$$x^a$$

$$x^b$$

$= -$ da seção “Regra dos Expoentes” no Capítulo 1.

$$x^b$$

$$x$$

$$x$$

Como você já retirou todos os termos escrevendo o máximo divisor comum somente uma vez, o resultado final é

Alerta do Kelley

uma versão muito mais compacta do

Lembre-se de que

polinômio original. É muito fácil verificar

sua resposta para o Exemplo 2 é

seu trabalho: distribua $15xy^2$ de volta nos

o polinômio na forma fatorada.

parênteses novamente e você deverá

É possível distribuir para verificar

obter a expressão original.

sua resposta, mas não considere a

expressão redistribuída sua resposta

final. Assim, sua resposta seria uma

cópia exata do problema original, e

isso não faria muito sentido.

Você Tem Problemas

Problema 2: Fatore o polinômio $-18a^3b^5c^2 - 9a^2b^3c^7 - 6a^3bc^5$.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 47

22/05/2014 14:51:13



48

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

Fatoração por Agrupamento

Quando eu era estudante, nunca ouvi falar em “fatoração por agrupamento”, não era um termo muito usado por meus professores — além de não ter nenhum significado para mim. Mesmo durante meus tempos de faculdade como estudante de matemática (e como sujeito que se veste totalmente sem noção — quantos pares de regatas uma pessoa precisa ter para provar que não tem nenhuma noção?), a

expressão “fatoração por agrupamento” nunca aconteceu. Nós, nerds da matemática, nunca discutimos isso em nossas festinhas, entre jogos malandros, como “Gire o transferidor” e “Verdade, consequência ou equação quadrática”.

Só fui aprender o significado desse termo

Ponto Crítico

quando virei professor, apesar de já estar

Se for solicitado que você

fazendo isso desde antes. Eu só não sabia que

fatore um polinômio que

havia um nome específico. É como descobrir

contém quatro termos (que

que o nome verdadeiro de seu amigo Barry é

não sejam semelhantes), é

Bartholomew Alistair Ramirez Michelangelo

provável que você tenha que

Baryshnikov III. Muito bonito, mas, para você,

fatorar por agrupamento).

será sempre Barry, o cara que vomitou na mesa

no casamento de sua irmã.

A fatoração por agrupamento é um jeito moderno de dizer que “um máximo divisor comum pode conter pedaços de binômios e de monômios simples como números e letras”. Por exemplo, na expressão $x^2(y - 1)^3 + x(y - 1)^2$ há dois fatores comuns: x e $(y - 1)$. Não importa que um deles seja apenas uma letra (x) e outro um grande binômio ($y - 1$). Eles são fatores separados, então, você deve comparar suas potências e usar a mais baixa para construir o máximo divisor comum, como fez antes: $x(y - 1)^2$.

Exemplo 3: Fatore o polinômio $3x^3 - 12x^2 + 2x - 8$.

Solução: Como mencionei antes, no último “Ponto Crítico”, é necessário aprender sobre a fatoração por agrupamento para resolver esse problema, pois ele contém quatro termos sem máximo divisor comum. Comece reescrevendo a expressão e dividindo-a em duas partes, emparelhando os dois primeiros termos e os dois últimos juntos. (Esse agrupamento forçado de pares é de onde a técnica obteve o nome.) PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 48

22/05/2014 14:51:13



Capítulo 4: Fatoração de Polinômios

49

Observe que cada par tem seu próprio máximo divisor comum. Então, reescreva esses binômios na forma fatorada:

Alerta do Kelley

Se estiver fatorando por

agrupamento e descobrir que não
acaba com binômios combinados
correspondentes, mas opostos um do
Essa é a etapa-chave para a fatoração por
outro, fatore -1 do segundo binômio e
agrupamento: os dois aglomerados agora
continue a operação. Por exemplo, se
apresentam um binômio combinado,
você tiver
ele
que deve ser fatorado. Nesse problema, é
se torna
.

necessário fatorar $(x - 4)$ de cada termo, e
então está pronto:

Você Tem Problemas

Problema 3: Fatore o polinômio:

Padrões do Divisor Comum

Não sou contra o jeito tradicional de trabalhar, mas adoro atalhos tanto quanto qualquer pessoa. Quando o assunto é fatoração, nem sempre é necessário matar-se trabalhando. Às vezes, você consegue olhar para um problema e obter a resposta imediatamente. Há três padrões muito comuns de fatoração, basta memorizar esses padrões, para reduzir drasticamente o tempo e a frustração gastos com polinômios.

Aqui estão os três padrões mais comuns
de fatoração e seus significados:

Diferença de quadrados

perfeitos, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Lembre-se de que não há

Quaisquer dois quadrados perfeitos

uma fórmula para fatorar a soma dos

que são subtraídos podem ser

quadrados perfeitos. Muitos estudantes

fatorados em dois binômios,

supõem que

um deles adiciona suas raízes

, mas isso não é verdade!

quadradas e o outro as subtrai. Por

De fato, esse é o erro *Sempre*

exemplo,

e

Equivocados com Produtos de

$16y^2 - 9 = (4y + 3)(4y - 3)$.

Polinômios (S. E. P. P.), erro da seção

“Multiplicação de Polinômios” do

Capítulo 3, recém escrita ao inverso, e

ainda está errada.



50

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

Soma dos cubos perfeitos,

. Esta fórmula é um

pouco mais complexa que a anterior, mas ainda assim deve ser memorizada.

É usada, como o nome sugere, para fatorar quaisquer dois cubos perfeitos somados juntos, como $27x^3 + 8$.

Escrever a expressão em termos de raízes cúbicas verdadeiras facilita seu trabalho um pouco:

. Se comparar isso à fórmula

$a^3 + b^3$, $3x$, é o termo a e $b = 2$. Coloque-os na fórmula para fatorar instantaneamente:

Diferença de cubos perfeitos,

. Essa é a fórmula

irmã da soma dos cubos perfeitos, sendo diferente somente em dois sinais, se você observar de perto.

Ponto Crítico

A primeira coisa a ser feita em qualquer problema de fatoração é verificar o máximo divisor comum; se existir, fatore imediatamente, então você poderá seguir adiante com outras técnicas, como os padrões de fatoração ou os métodos que você aprenderá no fim deste capítulo. Caso contrário, será impossível resolver o problema e, mesmo se você conseguir, sua resposta provavelmente não estará completamente fatorada.

Quando tiver terminado, certifique-se de fatorar totalmente suas respostas.

Eu sei que você odeia ter de memorizar coisas, eu também. Ainda assim, precisará ser incrivelmente inteligente para descobrir as fórmulas dos cubos mentalmente.

Ter as fórmulas em mente poderá tornar um problema que, de outra maneira seria impossível, quase trivialmente fácil, o que sempre é bom.

Você Tem Problemas

Problema 4: Fatore os polinômios completamente:

a. $3x^4 - 48y^4$

b. $r^3 - 125$

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 50

22/05/2014 14:51:14



Capítulo 4: Fatoração de Polinômios

51

Fatoração de Trinômios Quadráticos

Os polinômios quadráticos mais fáceis de fatorar têm o *coeficiente principal* de 1

(abordarei os difíceis na seção final deste capítulo). Você receberá um trinômio como

, e seu objetivo será fatorá-lo em dois binômios: $(x + ?)(x + ?)$.

Obviamente, sua primeira tarefa será descobrir o que diabos fica no lugar daquelas interrogações — há dois números exclusivos para todos os polinômios

, e

eles têm estas características:

1. **Eles adicionarão a a .** Em outras palavras, ao adicionar números

Fale a Linguagem

misteriosos, você deve obter o

O coeficiente principal

coeficiente de x , que aparece no

de um polinômio é o coeficiente do meio do polinômio.

termo com o expoente mais alto. Por

2. **Eles serão multiplicados para**

exemplo, o coeficiente principal da

ficarem igual a b . Não somente

$4x^3 + x^2 - 3x + 9$ é -3 . Está

a soma deles aparecerá no

“liderando” o polinômio porque seria

polinômio

, isso também

o primeiro na fila se você tivesse que

ocorre com o produto, ele deve

escrever o polinômio nas potências

ser igual à constante.

descendentes de x .

Quando você resolve o mistério dos valores que estão faltando, use-os para substituir as interrogações em $(x + ?)(x + ?)$ e fatorar o trinômio instantaneamente.

(É claro, se o trinômio contiver uma variável que não seja x , como em , sua

resposta final deverá conter a variável real usada no problema.)

Exemplo 4: Fatore os polinômios completamente.

a.

Solução: Quais dois números somados resultam em -9 , mas multiplicados dão 18 ? Observe que o produto é positivo, então os dois números devem ter o mesmo sinal (dois números com sinais diferentes sempre têm um produto negativo). Isso leva a outra pergunta: ambos os números são positivos ou negativos? Bem, como a soma deles é -9 , ambos devem ser negativos.

Os únicos dois números negativos que preenchem os requisitos necessários são -6 e -3 : $-6 + (-3) = -9$, e $(-6)(-3) = 18$. Use-os para substituir as interrogações em $(x + ?)(x + ?)$, e o polinômio é fatorado: $(x - 3)(x - 6)$. Não importa qual você escreve primeiro, pois o resultado final é o mesmo, de acordo com a propriedade comutativa da multiplicação.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 51

22/05/2014 14:51:14

52

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

b.

Solução: Você está procurando dois números que somados dão -10 e multiplicados resultam em 25 . Os números 5 e 5 funcionarão. (Você

não estará quebrando nenhuma regra se os números misteriosos forem iguais.) Claro, $5 \cdot 5 = 25$, mas $5 + 5 \neq -10$. Então, eles não funcionam. No entanto, note que -5 e -5 funcionam: $(-5)(-5) = 25$, e $-5 + (-5) = -10$. Então, a forma fatorada do polinômio é $(x - 5)(x - 5)$ ou $(x - 5)^2$.

c.

Solução: O coeficiente principal desse polinômio não é 1, então você ainda não pode usar sua técnica do número misterioso. Ainda assim, é possível fatorar o máximo divisor comum de 2 para obter . Dentro dos

parênteses, o coeficiente principal agora é 1, então você pode continuar. (Não se preocupe com aquele dois pendurado no limbo. Agora que está fatorado, você não tem de fazer nada mais com ele, exceto continuar carregando-o na frente de cada etapa do problema.) Quais dois números multiplicados resultam em -45 e somados resultam em

-4 ? A constante é negativa, então os números terão sinais diferentes. Como a soma deles é negativa, você sabe que o maior dos dois números será negativo.

Os únicos dois números que funcionam são -9 e 5 : $-9 + 5 = -4$, e $(-9)(5) = -45$.

Então, sua resposta final é $2(w - 9)(w + 5)$. Não esqueça de escrever o 2 que você fatorou antes na frente aos fatores do binômio.

Você Tem Problemas

Problema 5: Fatores os polinômios completamente:

a. $y^2 + 7y + 12$

b. $3x^2 + 9x - 84$

O Método Bomba de Fatorar Trinômios

Se estiver tentando fatorar um trinômio quadrático cujo coeficiente principal não seja 1, pode usar outro método para fatorar, um método oficialmente denominado

“fatoração por decomposição”, mas eu o chamo de “Método Bomba”. Ele causa uma explosão no meio do termo de um trinômio quadrático, rompendo-o em pedaços de um jeito muito preciso. Essa explosão

controlada resulta de fato em um polinômio com quatro termos que pode ser fatorado por agrupamento.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 52

22/05/2014 14:51:14



Capítulo 4: Fatoração de Polinômios

53

Aqui estão as etapas que você deve seguir para tentar fatorar um polinômio que se pareça com

:

1. Encontrar dois números que somados dão b e multiplicados dão $a \cdot c$.

Isso é semelhante ao método anterior de fatoração de trinômios, mas agora o coeficiente principal entra em jogo.

2. Reescrever o termo b como

a soma dos dois números

Ponto Crítico

que você encontrou na

Se você está fatorando

etapa 1. Esta etapa planta a

e $a = 1$, o Método

bomba no polinômio.

Bomba ainda funcionará.

3. Fatorar por agrupamento.

Ele acaba transformando-se

Observe que não há

na técnica de fatoração que

habilidades novas envolvidas

you aprendeu na seção anterior,

no Método Bomba. Ele só

porque

.

atalha algumas técnicas

que você já conhece e, ao

fazer isso, transforma um

problema difícil em um muito

mais fácil.

Não são muitas pessoas que sabem a respeito do Método Bomba, então muitos não têm nenhuma estratégia real para lidar com problemas difíceis de fatoração, somente experimentando com binômios para obter a resposta certa. Acho melhor ter um plano estabelecido, razão pela qual sou grande fã dessa técnica.

(Se eu fosse uma pessoa mais descolada, chamaria de técnica “Da Bomba”; mas não sou, então, esqueça.)

Exemplo 5: Fatore

.

Solução: Seu primeiro objetivo é encontrar dois números que tenham a soma de -1

(o coeficiente de x) e um produto de -12 (já que $6(-2) = -12$). Os dois únicos números assim são -4 e 3 . Escreva a soma deles no lugar

do coeficiente de x : Como $-4 + 3 = -1$, você não mudou o polinômio (agora você consegue ver o motivo pelo qual a soma de -1 era tão importante). Distribua o x para continuar.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 53

22/05/2014 14:51:14

54

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

Embora os últimos dois termos não tenham o máximo divisor comum maior que 1, você ainda precisa fatorar por agrupamento. Essa é uma das poucas ocasiões em que você terá de fatorar um fator de 1.

$$2x(3x - 2) + 1(3x - 2)$$

$$= (3x - 2)(2x + 1)$$

Você Tem Problemas

Problema 6: Fatore

.

O Mínimo que Você Precisa Saber

O máximo divisor comum é o maior número inteiro que divide cada termo de um polinômio sem deixar resto.

É possível fatorar a diferença de quadrados perfeitos, a soma de cubos perfeitos e a diferença de cubos perfeitos.

Um polinômio quadrático é um pouco mais difícil de fatorar se seu coeficiente principal não é 1.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 54

22/05/2014 14:51:14

Capítulo 5

Expressões Racionais e

Desigualdades Estranhas

Neste Capítulo:

Operações básicas com expressões racionais

Cálculo do mínimo múltiplo comum

Equações que contêm frações

Resolução de desigualdades racionais e quadráticas

Para se dar bem em matemática, você precisará ter muitas habilidades semelhantes às de um embaixador das Nações Unidas. Nações diferentes têm costumes diferentes e um dos requisitos do trabalho é um conhecimento amplo dessas diferenças culturais. Embora um saudável arroto possa, em um determinado país, ser uma demonstração para o chef do quanto você gostou da comida e se sente agradecido por ela, meu arroto em alto e bom tom depois de uma refeição comunicaria somente problemas gastrointestinais e humilharia minha esposa, que deveria ter feito algo melhor do que me levar a um lugar legal para comer.

Na comunidade matemática mundial é necessário ter sensibilidade cultural também.

Por exemplo, os números inteiros não veem problemas em serem adicionados uns aos outros, são como hippies da era do amor livre. Ainda assim, no reino dos números racionais (que são frações, como você deve lembrar do Capítulo 1), os cidadãos são bastante tensos em relação a todo esse processo de adição. Desse modo,

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 55

22/05/2014 14:51:15



56

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

eles têm leis muito específicas para a adição e a subtração de seus membros — os denominadores comuns são uma obrigação e, se você esquecer disso, há uma multa mínima de R\$ 1250

42 ou até 21 anos de prisão.

5

Neste capítulo, você se familiarizará com as regras das expressões racionais.

Descobrirá que, embora seus numeradores e denominadores contenham variáveis, as mesmas leis que governam os velhos números racionais de baunilha devem ser respeitadas nas expressões racionais mais complicadas.

Adição e Subtração de

Expressões Racionais

Conforme mencionei na bizarra metáfora do embaixador, as expressões racionais devem conter *denominadores comuns* antes que seus numeradores possam ser combinados. Embora duas expressões racionais possam compartilhar uma quantidade infinita de denominadores equivalentes, sua melhor aposta é calcular o *mínimo múltiplo comum* (MMC) para combinar os denominadores das frações.

O Mínimo Múltiplo Comum

Você lembra como encontrou o máximo divisor comum (MDC) no Capítulo 4? A primeira coisa que fez foi uma fatoraçaõ completa usando a árvore de fatoraçaõ.

Depois, comparou os resultados para ver quais fatores os termos tinham em comum.

Você usou o valor do expoente mais baixo de cada termo comum para construir o máximo divisor comum.

Será necessário usar a fatoração dos números primos novamente para determinar o mínimo

Fale a Linguagem

múltiplo comum. Contudo, há duas diferenças

Se duas frações têm

importantes no modo de usá-los:

exatamente o mesmo número

1. Use todos os fatores, não somente

no denominador, diz-se que têm

os comuns. Cada fator das expressões

denominadores comuns. O menor

envolvidas deve aparecer no mínimo

denominador comum possível para

múltiplo comum.

um grupo de expressões racionais

é denominado **mínimo múltiplo**

2. Em vez da potência com menor expoente

comum. Para calculá-lo, é necessária

de cada fator, use a maior. Se um fator

uma técnica similar àquela usada

for compartilhado, você deverá elevá-lo

para calcular o máximo divisor

à potência máxima que vê na expressão,

comum no Capítulo 4.

mas não a mais baixa, como você fez para descobrir o máximo divisor comum.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 56

22/05/2014 14:51:15



Capítulo 5: Expressões Racionais e Desigualdades Estranhas 57

Depois de encontrar o mínimo múltiplo comum, é possível reescrever todas as expressões racionais dadas, de modo que ele apareça em cada uma, permitindo, finalmente, a adição e subtração dessas expressões.

Exemplo 1: Qual é o mínimo múltiplo comum das expressões racionais , e

?

Solução: Comece fatorando os números primos de cada denominador:

. O primeiro denominador já é um número primo. Ele não pode continuar sendo fatorado.

. A constante 27 pode ser fatorada usando a árvore

de fatoração para resultar em 33, mas os termos do binômio $(2x + 1)$ não compartilham um máximo divisor comum (que não seja 1), então

o binômio fica sozinho.

. O binômio tem um máximo

divisor comum 4 que pode ser retirado, mas ao fazer isso, certifique-se de escrevê-lo como 42. Veja o quadro

lateral “Alerta do Kelley” para

descobrir por quê. Finalmente,

escreva a fatoração de 4

Alerta do Kelley

2. Como

$$4 = 2^2, 4^2 = (2^2)^2 = 2^{2 \cdot 2} = 2^4.$$

Ao retirar fatores de uma

expressão elevada a uma potência,

Aqui estão todos os fatores específicos

esses fatores deverão ser elevados a

nos denominadores (ignorando os

essa potência. Por exemplo, o binômio

expoentes no momento): 3, x , $(2x + 1)$,

dentro de

tem o máximo

e 2. Todos eles pertencem ao mínimo

divisor comum de y , mas como o

múltiplo comum, mas você vincula a cada

binômio é elevado à quinta potência,

um o valor do expoente mais alto que ele

o y também deverá ser, quando tiver

tem nos três denominadores:

sido fatorado:

.

. Multiplique as

constantes para obter o mínimo múltiplo

comum

Você Tem Problemas

Problema 1: Descubra o mínimo múltiplo comum da expressão racional

. (*Dica*: fatore os denominadores primeiro.)

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 57

22/05/2014 14:51:16

58

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

Combinando Expressões Racionais

Agora que você lembra como calcular o mínimo múltiplo comum, é necessário saber o que diabos fazer com ele. Seu objetivo é transformar todos os denominadores da expressão racional no mínimo múltiplo comum, e é assim que isso é feito: 1. **Divida o mínimo múltiplo comum pelo primeiro denominador na expressão.** Você pode fazer isso mentalmente, se quiser. Não é necessário ter isso escrito com todas as letras em seu trabalho.

2. **Se você obtiver um resto, multiplique o numerador e o denominador da fração pelo resto.** Como você está multiplicando ambas as partes da fração pelo mesmo valor, está multiplicando essencialmente por 1, o que não muda o valor da fração.

3. **Faça espuma, enxágue e repita.** Repita esse processo com cada fração.

4. **Escreva o numerador combinado sobre o denominador comum.** Agora você está livre para somar e subtrair os numeradores. Apenas certifique-se de escrever o resultado sobre o denominador comum.

Sei que parece complicado e, para ser honesto, há muitos locais em que você pode cometer erros pequenos, mas significativos; então, você precisará ser cuidadoso. A boa notícia é que, acredite ou não, somar e subtrair expressões racionais é uma das coisas mais difíceis a ser feita com elas, então, quando tiver dominado o processo, vai sentir-se em águas tranquilas no resto deste capítulo.

Exemplo 2: Simplifique a expressão do problema anterior de “Você

Tem Problemas” (Problema 1) deste capítulo:

Solução: Comece fatorando os denominadores da expressão racional.

Caso já tenha resolvido o Problema 1 (ou colado e olhado a resposta no Apêndice A), você sabe que o mínimo múltiplo comum é

. Divida esse

denominador comum por cada um dos denominadores anteriores, um de cada vez. Quaisquer pares de números que aparecem no numerador e no denominador podem ser riscados (pois qualquer número dividido por ele mesmo é 1). Aqui está o que você obtém ao dividir o mínimo múltiplo comum pelo denominador da fração mais à esquerda:

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 58

22/05/2014 14:51:16



Capítulo 5: Expressões Racionais e Desigualdades Estranhas 59

Multiplique o resultado, $(x - 1)(x + 5)$, pelo numerador e denominador da fração mais à esquerda.

Sabe o que houve? Você alterou a fração, forçando-a a trocar o mínimo múltiplo comum, que também mascarou seu numerador. Multiplique todos aqueles termos do numerador, mas deixe o denominador sozinho.

Agora faça o mesmo com as frações do meio e da direita, de modo que todas terão o mesmo denominador.

Alerta do Kelley

Se uma das frações em uma expressão racional for negativa,

certifique-se de distribuir o sinal negativo para cada termo no numerador ao combiná-

las. Por exemplo, ao simplificar

, você obterá

. Os

alunos costumam esquecer que o 5 z precisa ser negativo como o y que o precede, porque o sinal de subtração na frente de

no problema original afeta ambos os

termos dos numeradores.

Agora que tudo tem o mesmo denominador, é possível combinar todos os numeradores e simplificar:

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 59

22/05/2014 14:51:17



60

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

Se você soubesse como, fatoraria o numerador neste ponto e verificaria se a fração poderia ser simplificada (riscando fatores comuns encontrados no numerador e no denominador, como fez anteriormente, no problema). Ainda assim, fatorar um polinômio quártico não é uma coisa trivial, não vou discutir isso antes do Capítulo 7. Então, deixe sua resposta assim (a menos que realmente queira multiplicar o denominador para que ambas as partes da fração fiquem totalmente expandidas). De qualquer modo, ao simplificar,

você fez o máximo que pode fazer no momento.

Você Tem Problemas

Problema 2: Simplifique a expressão

Multiplicação de Expressões Racionais

Não há dúvidas, a adição de frações é difícil e, acima de tudo, não é divertida. Embora seja verdade que grande parte da matemática não possa ser facilmente classificada como “diversão”, a adição de frações pende mais para a outra extremidade do espectro, melhor descrita como “torturantemente chata”, ou “monótona, triste e que fazemos enquanto assistimos a vida passar”. A multiplicação de racionais, por outro lado, é muito fácil. Além disso, vamos encarar o fato: é hora de fazermos uma coisa fácil. Este deve ser um capítulo de revisão, para gritar de alegria! Esta deve ser a parte fácil!

Para multiplicar duas frações, simplesmente multiplique os numeradores e então faça o mesmo com os denominadores. Assim, $a \times b \cdot y = \frac{a \cdot b}{y}$. Não são necessários

$$b \cdot y$$

denominadores comuns, só multiplique e está tudo certo (a menos, é claro, que a resposta possa ser simplificada).

Exemplo 3: Calcule e simplifique o produto

.

Alerta do Kelley

A fração

no exemplo 3 não pode ser simplificada. Não tente cancelar

os termos x^3 da fração

. É possível cancelar as partes combinadas de uma fração

somente se elas estiverem sozinhas ou forem *multiplicadas* por outras.

Por exemplo, se a expressão tivesse sido

, ela poderia ter sido simplificada para

, porque x^3 e y^2 são *multiplicados*. Mas, como x^3 é *adicionado* ao denominador da fração original, não é possível cancelá-lo.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 60

22/05/2014 14:51:19

Capítulo 5: Expressões Racionais e Desigualdades Estranhas 61

Solução: Comece fatorando as expressões. Note que o denominador da fração à esquerda é uma soma dos cubos perfeitos (dos quais a fórmula é encontrada na seção “Padrões de Divisores Comuns”, no Capítulo 4).

Agora multiplique os numeradores e os denominadores, simplificando o resultado.

Use as leis dos expoentes para simplificar os termos de x

:

Você Tem Problemas

Problema 3: Calcule o produto e simplifique:

.

.

Divisão de Expressões Racionais

Quando pergunto aos alunos como dividir frações, a maioria fica com aquele olhar de robô petrificado e canta este mantra: “Mantenha, inverta, mude... mantenha, inverta, mude... mantenha, inverta, mude”. Embora sejam assustadores, de um jeito que lembra a *Colheita Maldita*, esses estudantes sabem o que fazer: manter a primeira fração como está, inverter a segunda (pegar a recíproca) e mudar o sinal de divisão para um sinal de multiplicação.

Em outras palavras, todos os problemas de divisão podem ser reescritos como problemas de multiplicação, pois a divisão significa a mesma coisa que multiplicação pelo recíproco. Pense nisso em termos de um número real por um segundo: dividir um número por 2 significa o mesmo que multiplicar o número por 1, recíproco de 2.

2

1

$$10 \div 2 = 5$$

10

10

-2

$$\cdot =$$

$$=$$

2 5

A receita “mantenha, inverta, mude”, ou MIM, (que na receita original é apimentada ou extracrocante) faz sentido ao colocar isso em contexto do modo a seguir.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 61

22/05/2014 14:51:20

62

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

Exemplo 4: Calcule o quociente e simplifique:

Solução: É sempre uma boa ideia fatorar primeiro ao lidar com expressões racionais.

Faça aquele olhar fantasmagórico e hipnotizado e repita depois de mim: “Mantenha, inverta, mude”.

Você já revisou como multiplicar frações, então, é hora de colocar o cérebro para funcionar no piloto automático.

Você Tem Problemas

Problema 4: Simplifique a expressão

. Dica: inverta somente a

fração que sucede o sinal de divisão.

Resolução de Equações Racionais

Você já ouviu a expressão “Existem várias maneiras de atirar o pau no gato”? Com ela, quer-se dizer que existem várias soluções para qualquer problema, mas não estou convencido de que a violência contra felinos seja necessária aqui. Outro clichê infantil semelhante e bem menos usado é “Existem vários jeitos de encher seu primo Scott de chutes de modo que ele não fique com hematomas e acabe criando problemas entre você e seus pais”. Honestamente, que tipo de pessoa sente *alívio* ao descobrir que é possível atirar um pau no gato de várias formas? Essa expressão precisa ser atualizada.

Ofereço esta alternativa: “Existem vários jeitos de eliminar um denominador.” É claro que há muitos prós e contras nessa escolha. Prós: ninguém gosta de frações e, como um denominador não é um animal macio que ronrona quando você faz carinho em sua cabeça, ninguém vai procurar uma sociedade protetora dos animais. Contras: é

22/05/2014 14:51:21



Capítulo 5: Expressões Racionais e Desigualdades Estranhas 63

difícil dizer essa expressão sem parecer *muito nerd*, o que poderia gerar um novo clichê

– “Existem várias maneiras de encher um nerd da matemática de chutes de modo que ele pare de tentar trazer a matemática para a linguagem cotidiana”.

Ainda assim, há várias formas de eliminar um denominador. Você ouviu certo, eliminar. Quando expressões racionais aparecem em uma equação, não precisa mais manipular essas expressões. Você, na verdade, pode eliminá-las completamente, deixando uma equação

muito mais simples no lugar. Aqui estão as duas melhores formas de aniquilar os denominadores em uma equação racional: 1. **Reescreva as frações com os denominadores comuns e, então, simplesmente reúna os denominadores.** Quando todos os denominadores em uma equação forem iguais, eles não se tornarão mais necessários. Então, eliminá-los completamente está totalmente dentro da lei. Desse modo, a equação tem a mesma solução da equação

2. **Multiplique tudo em ambos os lados da equação pelo mínimo múltiplo comum logo depois de fatorar os denominadores.** Isso eliminará as frações logo no início do problema, razão pela qual prefiro esta estratégia e a uso para resolver o Exemplo 5 a seguir.

Uma advertência: nunca divida ambos os lados de uma equação por uma variável, mesmo se for tentar resolver uma equação racional, porque há um perigo

Alerta do Kelley

muito real de que você acabe *eliminando*

Você precisa testar

as respostas.

sempre as soluções de uma equação

racional, pois há uma pequena

Exemplo: Resolva a equação

chance de que os métodos de solução

que eu descrevo aqui resultem em

respostas adicionais ou incorretas. É

Solução: Nenhum dos denominadores

um baixo preço a pagar por atalhos
pode ser fatorado, o que transforma a
tão úteis, e, mesmo com essa etapa
descoberta do mínimo múltiplo comum
acrescentada, ocorre uma economia
em uma cilada: $(x + 2)(x - 1)$. Multiplique
de tempo a longo prazo.

ambos os lados da equação pelo
denominador comum para eliminar
todas as frações:

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 63

22/05/2014 14:51:21



64

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

Multiplique e combine os termos semelhantes para descobrir que esta é uma equação bem simples disfarçada.

Não esqueça de vincular sua resposta de volta à equação original para garantir que funcione (e funcionará).

Você Tem Problemas

Problema 5: Resolva a equação

.

Representação Gráfica de

Desigualdades Estranhas

Se você não tiver lido o Capítulo 2 ainda (especialmente as seções finais, que discutem a representação gráfica de desigualdades), certifique-se de revisá-lo antes de entrar nesta seção. Afinal de contas, é bom lidar com desigualdades regulares antes de tentar lidar com as desigualdades estranhas.

Desde a primeira vez em que dei aula de pré-cálculo, agrupo as desigualdades quadráticas e racionais juntas, nesta categoria de “estranhas”. Elas são estranhamente similares porque ambas requerem o uso de *números críticos*, que são valores que fazem uma expressão ficar igual a 0 ou tornar-se indefinida.

Por exemplo, a expressão

tem dois

Fale a Linguagem

números críticos: 6 e -1 . Se substituir x por

Um **número crítico**

6, obterá 0, que é igual a 0. Por outro lado,

é um valor que faz uma expressão

7

ficar igual a 0 ou indefinida. Em

substituir $x = -1$ resultará em -7 , que é

uma expressão racional, os números

0

indefinido. Essencialmente, um número crítico

críticos transformam o numerador ou

é um valor que você pode vincular a x que

o denominador em 0.

torna uma expressão inteira ou somente seu

numerador ou denominador igual a 0.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 64

22/05/2014 14:51:22



Capítulo 5: Expressões Racionais e Desigualdades Estranhas 65

Desigualdades Quadráticas

Não existem muitas formas de substituir um número real pelo valor de x de uma desigualdade quadrática que fariam essa desigualdade ficar indefinida. Desse modo, quando estiver procurando seus números críticos, você pode se focar exclusivamente nos valores que tornarão a expressão quadrática igual a 0. Isso significa que precisará saber como resolver uma equação quadrática para resolver esses tipos de problemas.

O jeito mais fácil de resolver uma expressão quadrática que é colocada como igual a 0 é fatorando-a e então determinando que cada fator é igual a 0. (A expressão quadrática no Exemplo 6 será fatorável de modo que poderá usar essa abordagem.) Ainda assim, se a expressão quadrática não fosse fatorável, você não estaria sem sorte. Você só precisaria usar outra técnica, então darei a você duas alternativas no Capítulo 7.

Aqui está seu plano de ação para a resolução de desigualdades quadráticas: 1. **Certifique-se de que a expressão quadrática tem um 0 no lado direito do sinal de desigualdade e descubra os números críticos.** Isso significa definir o polinômio como igual a 0 e resolvê-lo.

2. **Marque os números críticos em uma reta numérica como pontos abertos ou fechados.** Use pontos abertos para $<$ ou $>$ e pontos fechados para $\leq$ ou $\geq$.

3. Teste os intervalos para verificar qual torna a desigualdade original verdadeira. Os números críticos dividem a reta numérica em partes. Por exemplo, dois números críticos dividem uma reta numérica em três partes, conforme ilustrado na Figura 5.1.

Figura 5.1

Os números críticos x e y dividem esta reta numérica em três intervalos (A , B e C). Em notação de intervalos, são eles: $A = (-\infty, x]$, $B = [x, y)$ e $C = (y, \infty)$. Use colchetes para indicar pontos cheios e parênteses para indicar pontos vazios.

Pegue um número real de

cada intervalo e vincule-o

à desigualdade original. Se

Ponto Crítico

ele tornar a desigualdade

Crie o gráfico da solução para

verdadeira, o mesmo

uma desigualdade quadrática

ocorrerá com todos os outros

escurecendo os segmentos da

valores no intervalo. A

reta numérica que são soluções

solução para a desigualdade

para a desigualdade.

será todos os intervalos

válidos conectados pela

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

palavra *ou*. Por exemplo, se os intervalos A e C na Figura 5.1 satisfizessem uma desigualdade, a solução seria escrita deste modo: “ $(-\infty, x]$ ou (y, ∞) ”. Lembre-se de que a expressão inteira, de duas partes é a resposta, não somente uma ou outra, como você pode inferir a partir da palavra *ou*.

Acredite ou não, essa técnica funciona não somente com desigualdades quadráticas, mas também com desigualdades de qualquer grau. Ainda assim, nos restringiremos às quadráticas no momento, pois a resolução de polinômios de graus mais altos é um tópico mais avançado e requer a atenção especial que recebe no Capítulo 7.

Exemplo 6: Resolva e represente graficamente a solução da desigualdade

.

Solução: Mova todos os termos diferentes de zero à esquerda do sinal de desigualdade.

Para encontrar os números críticos dessa desigualdade quadrática, trate-a como uma equação (mude $>$ para $=$). Fatore a expressão quadrática e defina cada fator como igual a 0 para obter os números críticos.

$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

$$x + 4 = 0$$

ou

$$x - 2 = 0$$

$$x = -4$$

ou

$$x = 2$$

Os números críticos -4 e 2 dividem a reta numérica em três intervalos $(-\infty, -4)$, $(-4, 2)$ e $(2, \infty)$. Escolha um “valor de teste” de cada intervalo – por exemplo, -5 , 0 e 3 , respectivamente – e substitua cada

um por x na desigualdade original para verificar qual torna a resposta verdadeira. Você verá que o intervalo $(-4, 2)$ não funciona, mas os outros dois sim; então, sua resposta final será “ $(-\infty, -4)$ ou $(2, \infty)$ ”.

Para gerar o gráfico dessa solução (exibida na Figura 5.2), use pontos abertos nos números críticos (considerando que a desigualdade original contém um sinal de $>$, não um sinal de $\geq$), e destaque na reta os dois intervalos que você acabou de identificar como soluções.

Figura 5.2

Qualquer valor nos intervalos $(-\infty, 4)$ ou $(2, \infty)$ tornarão a desigualdade verdadeira.

Você Tem Problemas

Problema 6: Resolva e represente graficamente a desigualdade

.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 66

22/05/2014 14:51:23

Capítulo 5: Expressões Racionais e Desigualdades Estranhas 67

Desigualdades Racionais

A resolução de uma desigualdade racional também requer que todos os termos diferentes de zero sejam movidos para o lado esquerdo do sinal de desigualdade.

No entanto, depois de estarem lá, você precisa obter os denominadores comuns e combinar todos eles em uma imponente fração. Desse modo, pode definir o numerador e o denominador dessa fração como iguais a 0 para identificar rapidamente os números críticos. Depois que os números críticos são identificados, é a mesma coisa de sempre.

Exemplo 7: Resolva e represente graficamente a solução da desigualdade

.

Solução: Acrescente 2 a ambos os lados da desigualdade e use o mínimo múltiplo comum de $(x - 4)$ para somar os dois termos:

Agora que há somente uma fração no lado esquerdo, defina o numerador e o denominador como iguais a 0 para encontrar os valores críticos.

ou

ou

Como você fez com as desigualdades quadráticas, use os valores de teste para obter a solução correta: $-\infty$

$(-\infty, 8)$ ou $(4, \infty)$; o gráfico é encontrado na Figura 5.3.

||

5

Figura 5.3

Como 85 é gerado pelo numerador, seu ponto depende do sinal de desigualdade. Contudo, 4 é gerado pelo denominador da desigualdade racional e, assim, deve ser marcado por um ponto aberto.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 67

22/05/2014 14:51:24

68

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

Note que você *deve* usar um ponto aberto para marcar quaisquer números críticos que venham do denominador (como 4, neste caso). Esses números, embora ainda sejam críticos, tornarão a fração não identificada e, assim, nunca podem ser parte da solução. O ponto do outro número crítico vem do (como sempre) sinal de desigualdade, se ele permite a igualdade (neste problema, permite, então use um ponto fechado para).

Você Tem Problemas

Problema 7: Resolva e represente graficamente a solução da desigualdade

.

O Mínimo que Você Precisa Saber

Para somar e subtrair expressões racionais, você deve ter denominadores comuns, preferencialmente o mínimo múltiplo comum das frações envolvidas.

A divisão é o mesmo que a multiplicação por um recíproco.

Você pode eliminar as frações em uma equação racional multiplicando a equação inteira pelo mínimo múltiplo comum (verifique suas respostas ao terminar).

Para resolver desigualdades quadráticas e racionais, é necessário usar números críticos, que quebram a reta numérica em intervalos de soluções possíveis.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 68

22/05/2014 14:51:25

Capítulo 6

Funções

Neste Capítulo:

Funções aritméticas

Gráficos de funções comuns para saber de cor

Representação gráfica de funções usando transformações

Criação de funções inversas

Identificação de assíntotas de funções racionais

Se você fizer uma pergunta a uma função, saberá exatamente como ela responderá.

É esse comportamento, de fato, que a torna uma função: cada entrada tem exatamente uma saída. Pergunte a uma função a mesma coisa duas ou 500 vezes, ela sempre responderá do mesmo modo. Neste capítulo, revise os conceitos importantes relacionados a funções.

Combinação de Funções

Assim, como quase todos os conceitos matemáticos do universo, as funções podem ser combinadas usando as quatro operações aritméticas básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão.

Entretanto, como as funções também possuem um

PF_CG_TCIG_Pre-Calculus.indb 69

22/05/2014 14:51:25



70

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

comportamento que faz delas tão exclusivas, elas também podem ser vinculadas umas às outras, em um processo denominado *composição de funções*.

Fale a Linguagem

Uma **função** é uma lei matemática, segundo a qual para cada entrada há exatamente uma saída. Essa relação normalmente é expressa na forma de uma equação, assim:

. Nesse caso, o nome da função é f se a entrada é x , e a saída será $f(x)$. Quando uma função é vinculada a outra, isso é chamado de **composição de funções**. Para conectar a função $g(x)$, em outra função, $f(x)$, você poderia escrever $f(g(x))$, ler “ f de g de x ”. Como

alternativa, você poderia escrever e ler “ f círculo g de x ”, que significa exatamente a mesma coisa.

Operações com Funções

Normalmente, não há truques para efetuar operações matemáticas em funções, desde que sejam somente expressões feitas de coisas com as quais você já sabe lidar, como polinômios e radicais. Se eu pedisse a você para adicionar duas frações, por exemplo, talvez você não gostasse da ideia, mas poderia fazê-lo. Assim, você também poderia somar duas funções racionais. Não há diferença nenhuma no procedimento, pois as expressões são também funções.

Exemplo 1: Se $f(x) = 2x^2 - 1$ e

, avalie o seguinte:

a.

Solução: Subtraia a função $g(x)$ de $f(x)$ e então substitua $x = -3$.

Você também poderia ter calculado $f(-3)$ e $g(-3)$ primeiro ($f(-3) = 17$ e

) e subtraído os resultados para obter a mesma resposta.

b.

Solução: A função $(fg)(x)$ é o produto de $f(x)$ e $g(x)$: Substitua por 10 cada x para avaliar $(fg)(10)$: PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 70

22/05/2014 14:51:26

$$f(x) = x^2 - 2x$$

$$f(g(x)) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 2\left(\sqrt{x+1}\right)$$

$$f(g(x)) = x + 1 - 2\sqrt{x+1}$$



Capítulo 6: Funções

71

Se tudo o que você pudesse fazer com as funções fosse somá-las e subtraí-las, elas seriam uma decepção. Afinal de contas, somar expressões é tão chato quanto subtraí-las. Ainda assim, você teve de lidar com funções o suficiente para saber que, mesmo que sejam previsíveis, não são chatas, conforme você verá no resto deste capítulo.

Composição das Funções

Ponto Crítico

Para compor duas funções, substitua

É *possível* que a composição de

as variáveis em uma função pela

funções seja comutativa e isso

outra função inteira – mas você

é, de fato, um indicativo de algo

precisa prestar muita atenção

importante. Se $f(g(x)) = g(f(x)) =$

para garantir que a função correta

x (em outras palavras, quando

vá para o local correto, pois a

você vincula $g(x)$ com $f(x)$ ou composição de funções não é

vice-versa, tudo é cancelado, exceto

comutativa. Em outras palavras, não

x). Então, $f(x)$ e $g(x)$ são denominadas há garantia de que $f(g(x)) = g(f(x))$.

funções inversas. Você saberá mais

Exemplo 2: Se

e

sobre isso posteriormente, ainda neste

, avalie as expressões

capítulo, na seção “Funções Inversas”.

a seguir:

a.

Solução: A expressão

significa o mesmo que

. Observe que $g(x)$

é escrita completamente dentro dos parênteses da f na expressão

; isso

diz que é necessário para substituir cada x na $f(x)$ não por um número (como você fez no Exemplo 1), mas por uma função de $g(x)$.

Como Você Fez Isso?

Algumas vezes, como no Exemplo 2, uma expressão com radical é eliminada por um sinal de quadrado, como

. Isso ocorre porque os radicais são,

de fato, potências fracionárias (como, você lembrará, na seção “Expressões com Radicais”, do Capítulo 1).

Se eu reescrever o sinal do radical como uma potência de 1 em vez disso, veja o que 2

acontece:

. A lei dos expoentes diz para multiplicar as potências

elevadas a potências, mas os expoentes 1 e 2 são recíprocos, então seu produto é 1, o 2

que deixa uma resposta simplificada de $(x + 1)^1$, ou simplesmente $x + 1$.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 71

22/05/2014 14:51:27

$$g(x) = \sqrt{x + 1}$$

$$g(f(x)) = \sqrt{(x^2 - 2x) + 1}$$

$$g(f(x)) = \sqrt{(x - 1)^2}$$

$$g(f(x)) = |x - 1|$$

72

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

b.

Solução: Nesta expressão, você deve vincular $f(x)$ em $g(x)$, o que é igual a $g(f(x))$.

Essa expressão pode ser simplificada. Observe que

pode ser

fatorado em

, ou $(x - 1)^2$:

Lembre-se de que um número em uma potência par dentro de um radical com um índice que se combina àquela potência significa que você deve adicionar sinais de valores absolutos.

Você Tem Problemas

Problema 1: Se

e

, avalie as expressões a seguir:

a. $(h)^w$

$(|k|)()$

b. $(h \circ k)(-1)$

Representação Gráfica de Funções

Os gráficos de desigualdades são tão simples de desenhar que chega a ser um pouco constrangedor. Contanto que você seja cuidadoso com os pontos, não há muitas dificuldades. Os gráficos de funções, por outro lado, são um pouco mais complexos.

Afinal de contas, como as funções contêm tanto uma *variável independente*, como x (que indica a entrada), quanto uma *variável dependente*, como $f(x)$ (a saída resultante), você precisa usar um sistema de representação gráfica que contenha não só um, mas dois eixos. Então, dê adeus aos gráficos com retas de números de uma dimensão e diga olá aos gráficos bidimensionais no plano cartesiano.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 72

22/05/2014 14:51:43



Capítulo 6: Funções

73

Fale a Linguagem

A **variável independente** em uma função (normalmente, x) é aquela da qual você controla o valor, porque decide o que vincular a ela; é representada graficamente ao longo do eixo horizontal. A **variável dependente** (normalmente $f(x)$ ou y) é chamada assim porque seu valor *depende* do que você vincula à variável independente e é representado graficamente ao longo do eixo vertical.

Quatro Importantes Gráficos de Funções

A grande maioria dos gráficos que você gerará como estudante de pré-cálculo pode ser feita rapidamente e de maneira bastante precisa, sem a necessidade de determinar vários pontos no plano cartesiano. Isso ocorre por que a maioria dos gráficos são somente variações dos quatro gráficos básicos de funções, exibidos na Figura 6.1. Todas as funções quadráticas terão um gráfico que se parecerá um pouco com $f(x)$ na Figura 6.1, cada função com radical se parecerá um pouco com $j(x)$, cada racional lembrará $k(x)$ e assim por diante.

Figura 6.1

Memorize as formas e

as características destes

quatro gráficos básicos de

funções, pois a maioria dos

gráficos que você precisará

desenhar em pré-cálculo

será uma versão esticada,

encolhida, invertida ou

deslocada de cada um deles.

Embora a Figura 6.1 forneça uma boa ideia sobre a aparência desses gráficos, dedique um tempo a esboçá-los cuidadosamente em um papel adequado, determinando vários pontos (vincule alguns valores de números inteiros para x para avaliar $f(x)$ e determine os pontos $(x, f(x))$ no plano cartesiano). Assim, será possível ver por que os gráficos têm a forma que têm e você não precisará simplesmente confiar na minha palavra.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 73

22/05/2014 14:51:44



74

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

Quando você estiver confortável com os gráficos e sentindo que pode desenhar cada um rapidamente e com relativa precisão, estará pronto para seguir à próxima etapa, a transformação de funções. Isso o ajudará a desenhar quase todos os gráficos rapidamente. Lembre-se de que os gráficos que você produzirá não serão 100%

precisos, mas você é somente um ser humano, e mesmo gráficos baseados em milhares de pontos determinados são, ainda assim, inerentemente imprecisos, pois você ainda acaba desenhando os gráficos manualmente.

A vantagem da abordagem de transformação de funções para a representação gráfica (e do motivo pelo qual bons instrutores ensinam esse método em vez do esboço de pontos) é que você entende de fato como os números em uma função afetam seu gráfico. Você está realmente aprendendo conceitos importantes sobre o que torna um

gráfico robusto, não somente jogando *Ligue os Pontos*.

Ponto Crítico

Você pode encontrar a função

em pré-cálculo e perguntar-se o que

diabos são esses colchetes duplos. Eles representam a *função maior inteiro*, da qual você provavelmente nunca ouviu falar. Como os valores absolutos, esses símbolos têm um objetivo muito específico, mas, em vez de retornar números positivos (como fazem os valores absolutos), eles retornam um tipo de número inteiro muito específico.

Para avaliar a função maior inteiro, pegue o número que está dentro e descubra qual é o maior número inteiro que é *menor que* (ou igual a) esse número. Por exemplo, a expressão 7,9284 está perguntando: “Qual é o maior número inteiro que é menor que 7,9284?”. A resposta é 7.

Olhando pela primeira vez, pode parecer que a função maior inteiro diz para você simplesmente largar o número decimal adicional ou a fração (como nas expressões 6,246

e

), e isso é verdadeiro, a menos que você esteja lidando

com números negativos.

Observe que $-3,5$ não pode ser igual a -3 , pois $-3 > -3,5$, e a função do maior inteiro exige que a resposta seja menor que o que está dentro desses colchetes duplos.

Desse modo, quando você estiver tentando encontrar o valor da função do maior inteiro de um número negativo, a resposta é exatamente um menos o que você obterá se simplesmente eliminasse os decimais: $-3,5$

e

.

Transformação de Funções

Quando eu era jovem, tinha uma coleção bem volumosa de bonecos *Transformers*.

Você provavelmente já ouviu falar deles, brincou com eles, comprou-os para seus filhos ou acabou com um deles inadvertidamente alojado em sua traqueia.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 74

22/05/2014 14:51:45



Capítulo 6: Funções

75

De qualquer modo (exceto no último), eles eram muito divertidos. Com apenas algumas torções e cliques, você poderia transformar um avião de plástico em uma figura de ação com uma anatomia que lembrava vagamente a de um avião.

Como bons membros dessa geração alimentada pela televisão, eu e meu irmão Dave travávamos batalhas épicas de *Transformers*, recitando frases de efeito que ouvíamos nos comerciais: “*Transformers!* Mais do que os olhos podem ver!

Transformers! Robôs disfarçados!”.

Aprendemos uma lição valiosa com esses bonecos: alguns ajustes em um conceito bem conhecido podem produzir um resultado que, embora exclusivo, ainda se pareça estranhamente com o que havia no início. (“Ei, por que o robô gigante tem um toca-fitas dentro do peito?”) O mesmo ocorre com a álgebra – um sinal negativo aqui ou ali ou uma constante perturbando podem distorcer qualquer um dos gráficos que apresentei na seção anterior (os quatro gráficos básicos de funções na Figura 6.1) e criar aproximadamente 70% dos gráficos que você precisará desenhar como estudante de pré-cálculo. Aqui estão os detalhes desses ajustes e como eles afetam o gráfico de uma função genérica $f(x)$:

Uma constante somada a ou subtraída da função causa uma mudança vertical no gráfico. Em outras palavras, o gráfico de uma função $f(x) + 2$ é criado ao se mover o gráfico inteiro de $f(x)$ duas unidades para cima. De maneira similar, para obter o gráfico de $f(x) - 3$, o gráfico original de $f(x)$ seria movido para baixo em três unidades.

Uma constante somada a ou subtraída da entrada de uma função muda seus gráficos horizontalmente. A diferença entre isso e a transformação anterior está no local da constante que é somada ou subtraída. Neste caso, ela aparece *dentro da própria função*, como $f(x + 2)$ em vez de $f(x) + 2$.

A soma dentro de uma função faz com que o gráfico

Ponto Crítico

mova essas unidades à
Note que as transformações
esquerda, e a subtração mova
aplicadas na entrada da função
o gráfico à *direita*, que é
terão um efeito oposto do que
exatamente o oposto do que
o que você provavelmente
você imaginaria. Então, o
espera obter. A soma na entrada
gráfico de $f(x + 5)$ se parece
moverá a função à esquerda
com o gráfico de $f(x)$ movido
e não à direita; a multiplicação na

cinco unidades à esquerda,
entrada da função por um número de
e o gráfico de $f(x - 1)$ é o
valor grande, na verdade faz o gráfico
gráfico de f movido uma
encolher horizontalmente.
unidade à direita.

A multiplicação de uma função por uma constante estica ou encolhe a função verticalmente. Dito de maneira simples, o gráfico de $5f(x)$ estica 5

vezes para cima e para baixo, o gráfico de $f(x)$. Multiplicar um
número maior PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 75

22/05/2014 14:51:45

76

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

que 1 afasta uma função do eixo x , mas multiplicar por um número
entre 0 e 1 de fato a aproximado eixo x .

Observe, contudo, que isso não muda os interceptores de x de uma
função, pois esses pontos tecnicamente têm uma altura de 0, e cinco
vezes essa altura ainda é igual a 0.

A multiplicação de uma entrada de uma função por uma constante estica ou encolhe o gráfico horizontalmente. Nesse tipo de transformação, a multiplicação ocorre na própria função, como $f(3x)$ em vez de $3f(x)$. A multiplicação por um número maior que 1 faz o gráfico ficar mais estreito, próximo à origem ($f(3x)$ tem um gráfico três vezes tão estreito quanto $f(x)$), enquanto a multiplicação por um número entre 0 e 1 de fato estica o gráfico, de acordo com o recíproco desse número (o gráfico de $f(x/2)$ é duas vezes

mais amplo que o gráfico de $f(x)$, porque é o recíproco de 2).

A multiplicação de uma função por um número negativo faz seu gráfico refletir sobre o eixo x .

Isso não muda a localização horizontal dos pontos, só os move a uma distância igual sobre o eixo x . Em outras palavras, cada ponto (x, y) no gráfico se transforma em $(x, -y)$, virando de cabeça para baixo o eixo x como na Figura 6.2.

Figura 6.2

Os gráficos de $f(x)$ e

$-f(x)$ são reflexos um

do outro no eixo x ,

enquanto os gráficos

de $f(x)$ e $f(-x)$ são

reflexos no eixo y .

Reflexo sobre o eixo x

Reflexo sobre o eixo y

A multiplicação de toda a entrada de uma função por um número negativo reflete seu gráfico no eixo y . Neste momento, a altura dos pontos não muda, mas eles são movidos a uma distância igual no eixo y . Em outras palavras, cada ponto (x, y) se transformará em $(-x, y)$, invertendo o gráfico no eixo y , como na Figura 6.2.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 76

22/05/2014 14:51:46

Capítulo 6: Funções

Tomar o valor absoluto de uma função move todos os pontos em seu gráfico acima do eixo x . Nenhuma parte do gráfico da $f(x)$ que já esteve acima do eixo x mudará, mas a parte abaixo dele será refletida no eixo x no gráfico da $f(|x|)$.

Tomar o valor absoluto de uma entrada de uma função faz o gráfico do lado esquerdo clonar o lado direito. Para representar graficamente $f(|x|)$,

comece desenhando o gráfico normal da $f(x)$. Quando tiver terminado, apague qualquer parte do gráfico à esquerda do eixo y . Deixe a parte à direita do gráfico separada, mas reflita uma cópia dela no eixo y para completar o gráfico. Essa é a transformação de gráfico mais complexa; e, por ser tão bizarra, apresento-a no Exemplo 3.

Se houver várias transformações num dado gráfico, faça-as nesta ordem: reflexos, aumentos, valores absolutos e, por fim, deslocamentos.

Exemplo 3: Represente graficamente a função

.

Solução: Comece com o gráfico não transformado de x , que você memorizou. Há duas transformações na $g(x)$, os sinais de valores absolutos ao redor da entrada e 3

adicionado à função. Você deve aplicar a transformação do valor absoluto primeiro, então apague toda porção do gráfico à esquerda do eixo y (neste caso, no entanto, nenhuma parte do gráfico existe à esquerda do eixo y). Agora, faça uma cópia do que resta no eixo y , como faria na transformação $f(-x)$. Você acaba com um gráfico que se parece com uma gaivota voando.

Finalmente, mova o gráfico inteiro por três unidades, de modo que o corpo da gaivota fique localizado no ponto $(0,3)$ em vez de $(0,0)$. Você acabará com o gráfico final na Figura 6.3.

y

Figura 6.3

O gráfico de

é

criado clonando o gráfico
de x no eixo y e movendo
o resultado três unidades
para cima.

x

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 77

22/05/2014 14:51:47



78

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

Você Tem Problemas

Problema 2: Represente graficamente a função de

.

Funções Inversas

Anteriormente, neste capítulo, durante minha explicação da composição das funções, mencionei um relacionamento especial entre duas funções que cancelaram uma à outra quando foram vinculadas.

Se , então $f(x)$ e $g(x)$ são

funções inversas e podem ser escritas como

ou

Você já sabe várias funções inversas, ainda que ache que não sabe (acredite em mim, eu sei o

Alerta do Kelley

que estou falando). Cada vez que você resolve

A notação de funções

uma equação, está usando funções inversas.

inversas,

, não significa que $f(x)$

Por exemplo, se solicitado a resolver $x^2 = 4$, a

é elevada à potência -1 ; isso seria

melhor estratégia seria tomar a raiz quadrada

escrito deste modo: $(f(x))^{-1}$ e significaria

de ambos os lados para obter

, que

outra coisa. Enquanto $f^{-1}(x)$ significa o

significa

. Quando você aplica a função x^2

“inverso de $f(x)$ ” ou , “ f inversa de x ”, na função da raiz quadrada, elas cancelam uma

significa “a recíproca de $f(x)$ ”.

à outra, deixando somente x do lado esquerdo

da equação e permitindo que você resolva o

problema.

O Comportamento das Funções Inversas

A relação entre uma função e sua inversa tem características muito específicas, que abrangem as características importantes a seguir:

Uma função inversa inverte o par ordenado da função original.
Digamos que você entra com 5 na função $f(x)$ e obtém -2 ; então, $f(5) = -2$. A função inversa inverte esses números, a entrada se torna a saída e vice-versa. Assim, $f^{-1}(-2) = 5$. Isso é possivelmente a característica mais importante das funções inversas e o que faz com que elas cancelem uma à outra. Neste caso, temos $f(f^{-1}(-2)) = f(5) = -2$ e $f^{-1}(f(5)) = f^{-1}(-2) = 5$.

Os gráficos das funções inversas são reflexos um do outro na reta $y = x$.

A propriedade da inversão de coordenadas das funções inversas que descrevi no tópico anterior tem um efeito peculiar sobre seus gráficos. Elas espelham suas funções originais na reta $y = x$ (a reta simples que passa pela origem com a inclinação 1), como demonstrado na Figura 6.4.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 78

22/05/2014 14:51:47

Capítulo 6: Funções

79

Figura 6.4

Como os gráficos de $f(x)$ e $-f(x)$ são reflexos um do outro no eixo x , os gráficos de uma função e seu inverso são reflexos um do outro na linha pontilhada $y = x$.

Uma função deve passar pelo teste da reta horizontal para possuir uma inversa válida. Lembra-se do teste da linha vertical? Diz-se que se qualquer linha vertical desenhada ao longo de um gráfico encostasse em mais de um lugar, o gráfico não poderia representar uma função. Bem, se qualquer reta horizontal bater no gráfico de uma função mais de uma vez, essa função não poderá ter uma inversa.

Como Você Fez Isso?

Você está perguntando-se por que uma função deve passar pelo teste da linha horizontal para se qualificar como inversa? Digamos que alguma função $f(x)$ não passe no teste da linha horizontal porque ambas $f(1) = 7$ e $f(5) = 7$. (Em outras palavras, a reta horizontal $y = 7$ atingirá o gráfico de $f(x)$ duas vezes, uma quando $x = 1$ e uma quando $x = 5$.) Lembre-se de que uma função inversa inverte pares ordenados. Então e . Espere um minuto, isso não é permitido! Se

é, de fato, uma função, ela

deve ter exatamente um resultado para cada entrada. No caso de

, uma entrada de

7 resultaria em 1 ou 5. Rodar no teste da linha horizontal garante que a inversa de uma função não seja uma função.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 79

22/05/2014 14:51:47

80

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

Criação de uma Função Inversa

Você pode usar um processo simples para mudar uma função para sua inversa.

Funciona assim: substitua a $f(x)$ por y , troque o x e o y na função, resolva o resultado para y e, ao terminar, substitua aquele y pela notação da função inversa oficial, $f^{-1}(x)$. Aqui está um exemplo rápido para que você se certifique de conseguir fazer isso.

Exemplo 4: Se

(quando $x \geq 0$), qual é a

?

Solução: A restrição ($x \geq 0$) tem que aparecer aqui porque o gráfico de falha no teste da linha horizontal. Ainda assim, essa restrição diz para ignorar, apagar e esquecer da parte do gráfico para a qual $x < 0$. Em outras palavras, metade do gráfico à esquerda do eixo y não existe nesse problema.

Substitua $f(x)$ por y para obter

. Agora troque o x e o y e resolva para y .

A resposta final é

, mas não

. Por quê? Somente o

radical positivo tem um gráfico que é um reflexo de $f(x)$ na reta $y = x$. (O gráfico de reflete um pedaço da $f(x)$ que foi eliminada pela restrição $x \geq 0$; então, isso não está incluído na resposta.) **Você Tem Problemas**

Problema 3: Se

, qual é $g - 1(x)$?

Assíntotas de Funções Racionais

Pense novamente no gráfico da

por um momento. O que o fez diferente

dos gráficos de outras funções que você memorizou neste capítulo? Foi o único que teve uma ruptura, é impossível desenhar o gráfico de uma extremidade até a outra sem levantar o lápis pelo menos uma vez.

A função precisa ser rompida porque a $f(0)$ é indefinida; a fração 1 não tem o valor 0

de um número real, então o gráfico contém uma *assíntota* vertical da qual a equação é $x = 0$. Uma assíntota é uma linha que, embora não seja parte do gráfico, também ajuda a formá-lo, pois o gráfico acaba inclinando-se para evitar tocar nessa linha.

22/05/2014 14:51:49



Capítulo 6: Funções

81

Pense numa assíntota como um limite do qual as linhas dos gráficos ficarão cada vez mais perto ao infinito, mas nunca deverão tocar

Fale a Linguagem

(provavelmente porque ficarão

Uma **assíntota** é

com coceira de alergia por toda a uma linha que representa pontos eternidade, e ter coceira alérgica por inatingíveis do gráfico de uma toda a eternidade não é algo de que

função racional. Normalmente são os gráficos gostam).
desenhados como linhas pontilhadas
Mesmo a função racional mais simples no plano de coordenadas, mas não normalmente tem pelo menos uma são tecnicamente parte do gráfico.
assíntota em seu gráfico, mas há três tipos diferentes de assíntotas. Aqui estão algumas formas de descobrir quais são essas assíntotas:

Assíntotas verticais. Para descobrir as assíntotas

Ponto Crítico

verticais de uma função,
As assíntotas horizontais, como
fatore-a completamente
todas as retas horizontais, têm
e determine cada fator do
equações que começam com
denominador como igual a 0.
 $y =$. As equações de assíntotas
Cada solução que você obtiver

verticais começam com $x =$.

e que não tornar o numerador

As assíntotas inclinadas são

igual 0 dará a você a assíntota

equações lineares na forma de

vertical da função.

intercepto-coeficiente angular, então

Assíntotas horizontais. Se

se parecem com $y = mx + b$, com

o grau do numerador for n

números em vez de m e b , é claro.

e o grau do denominador

for d , você pode comparar

os valores de n e d para

descobrir as assíntotas horizontais:

Se $n > d$, não há assíntotas horizontais.

Se $n < d$, a função tem exatamente uma assíntota horizontal $y = 0$.

Se $n = d$, a função tem uma assíntota horizontal: $y = a$

$=$, onde a é o

b

coeficiente principal do numerador e b é o coeficiente principal do denominador.

Assíntotas inclinadas. Qualquer assíntota que não seja vertical nem horizontal é descrita como uma *assíntota inclinada*, mas esse tipo de assíntota ocorre somente em um caso específico: quando o grau do numerador é exatamente um a mais que o do denominador. Use a divisão longa ou sintética para dividir o numerador pelo denominador e ignore o resto. Só defina y como igual ao quociente com o qual você terminar; essa é a equação da assíntota inclinada.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 81

22/05/2014 14:51:49

82

Parte 1: Requisitos Prioritários do Pré-cálculo

Uma função racional pode ter algumas assíntotas verticais, mas pode ter somente uma assíntota horizontal ou uma assíntota inclinada.

Exemplo 5: Determine quantas assíntotas a função

tem e

forneça a equação de cada uma.

Solução: Comece fatorando o numerador e o denominador.

Agora, você deverá verificar as assíntotas verticais. Defina o denominador como igual a 0 e obterá $x = 4$. Como esse valor não faz com que nenhum fator no numerador (e, desse modo, o numerador inteiro) fique igual a 0, $x = 4$ é uma assíntota vertical da função.

Há assíntotas horizontais? O grau do numerador (2) é maior que o grau do denominador (1), então não, não há nenhuma. Ainda assim, aquela diferença de um grau é um indício de que haverá uma assíntota inclinada.

Para calcular a assíntota inclinada, divida o numerador original pelo denominador

. Como o divisor é um binômio linear, é possível usar a divisão sintética. Não se esqueça de que o oposto da constante do binômio

sempre fica no quadro (lembre-se, você subtraiu na divisão longa).

$$4 \ 2 \ 9$$

—

$$9$$

$$8 \ - \ 4$$

$$2 \ - \ 1$$

$$5$$

O quociente é $2x - 1$ (ignore o resto 5); então, a equação da assíntota inclinada é $y = 2x - 1$. Verifique a Figura 6.5 para ver como essas duas assíntotas se comportam como limites e aperte o gráfico de $f(x)$ em um espaço restrito.

Figura 6.5

Observe como o gráfico

de

se inclina para evitar as

$$y = 2x - 1$$

assíntotas que você encontrou

no Exemplo 5, quase como se

$$x = 4$$

estivessem infectadas

com uma quantidade

enorme de piolhos.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 82

22/05/2014 14:51:50

Você Tem Problemas

Problema 4: Determine quantas assíntotas a função tem, e forneça a equação de cada uma.

O Mínimo que Você Precisa Saber

A expressão

significa

– vincule a função $g(x)$ inteira para a variável independente da $f(x)$.

A maioria dos gráficos de funções pode ser criada aplicando transformações simples em um dos gráficos a seguir:

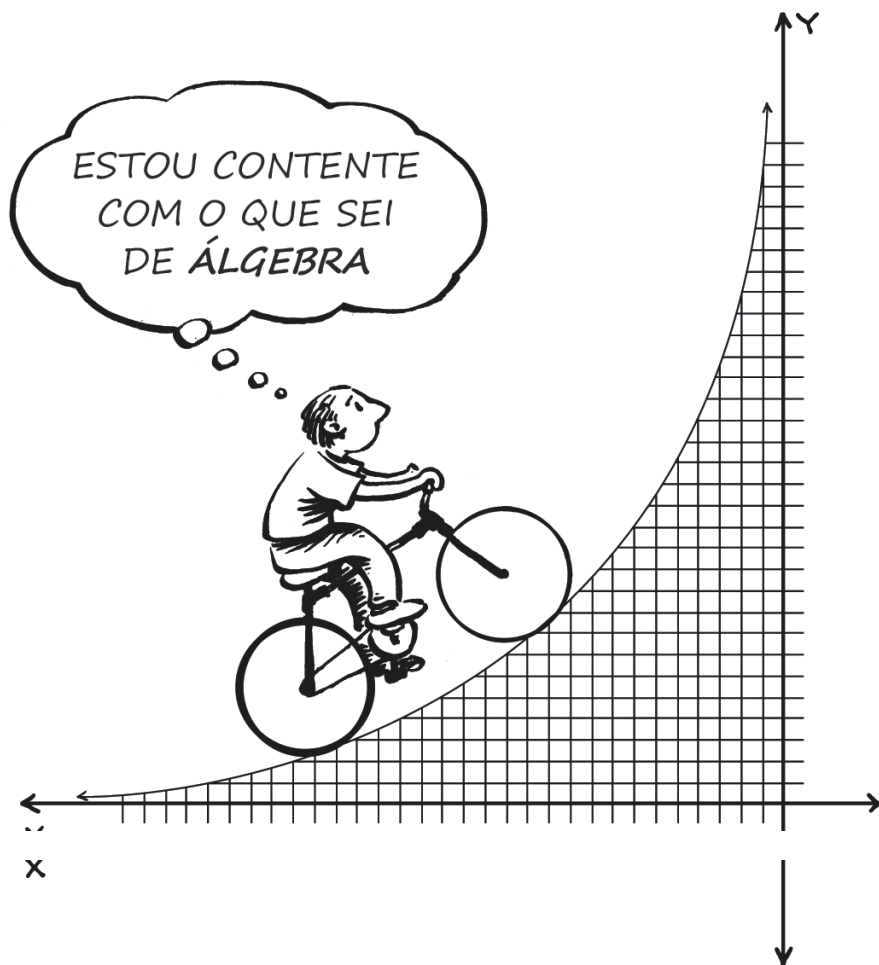
,

, $y = x$ ou

.

Se o gráfico de uma função contém o ponto (a, b) , o gráfico da sua inversa conterá o ponto (b, a) .

As funções racionais podem ser formadas por assíntotas verticais, horizontais e inclinadas.



2

Parte

Equações e Funções

Não Lineares

Se voc ê tiver entendido a maioria dos capítulos de revisão (mesmo que parte deles tenha sido uma surpresa), provavelmente está sentindo-se bem confiante agora. Se, entretanto, a seção de revisão tiver sido cheia de ciladas e tiver levado muito tempo para limpar sua poeira algébrica e para ajudá-lo vencer os problemas, talvez esteja perguntando-se: “Como vou vencer o resto do livro sem jogar-me de

um penhasco?”

Surpreendentemente, ambos os grupos de leitores (os confiantes e os apavorados) encontrarão estímulos nos capítulos a seguir. O conteúdo, daqui até o fim do livro, provavelmente será novo e desafiador. Provavelmente, você dará passos mais curtos a partir de agora.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 85

22/05/2014 14:51:51

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 86

22/05/2014 14:51:51

7

Capítulo

Funções e Equações

Elevadas a Altas

Potências

Neste Capítulo:

Resolução de equações quadráticas não fatoráveis

Esboço de conclusões com base nos testes do coeficiente principal e da raiz racional

Aplicação da Regra dos Sinais de Descartes

Raízes de funções que não são quadráticas

Conforme você amadurece em álgebra, percebe que nem sempre há apenas uma resposta para um problema. Você sai das equações lineares e vai para as quadráticas e equações de outro tipo, com expoentes até maiores – o número de respostas possíveis aumenta, e os

métodos de solução que são usados para obtê-las ficam um pouco mais difíceis. Tudo bem, pois isso significa que você está crescendo na matemática e pode lidar com um pouco de incerteza. Neste capítulo, você não PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 87

22/05/2014 14:51:51



88

Parte 2: Equações e Funções Não Lineares

apenas terá termos com equações que possuem múltiplas soluções, como também aprenderá a usar as pistas incorporadas nessas equações para descobrir exatamente quais são as soluções.

Resolução de Equações Quadráticas

Até o fim do Capítulo 5, revisei os passos a seguir como o jeito mais simples de resolver uma equação quadrática:

1. Definir a expressão quadrática como igual a 0.
2. Fatorar o polinômio.
3. Definir cada fator como igual a 0 e resolver.

Assim, para resolver a equação quadrática

, primeiro você adiciona 14 a

Alerta do Kelley

ambos os lados para definir a quadrática como

O funcionamento da

igual a 0:

. Então, você fatora o

técnica da fatoração para a resolução

lado esquerdo da equação, define cada fator

de equações quadráticas é garantido

como igual a 0 e resolve as miniequações

somente se você definir o polinômio

resultantes.

como igual a 0 *antes* de fatorá-lo.

ou

ou

Isso é tão simples e objetivo que você pode perguntar por que aprendemos algum outro método de resolução de equações quadráticas. O motivo é este: nem todas as equações quadráticas serão bem fatoradas em um par de binômios. De fato, a maioria delas não o será. Por sorte, você tem dois métodos de solução alternativos (completar o quadrado e a fórmula quadrática) para quaisquer quadráticas que possam surgir.

A maioria dos estudantes gravita em torno da fórmula quadrática, pois trata-se de um processo fácil, de “substituir e movimentar” – memorizar a fórmula, substituir os números, simplificar a equação, isso e aquilo, fim de jogo. No entanto, você definitivamente deverá aprender como completar o quadrado também, pois precisará saber como fazer isso quando chegar às seções cônicas dos capítulos 15 e 16.

PF_CG_TCIG_Pre-Calculus.indb 88

22/05/2014 14:51:51



Capítulo 7: Funções e Equações Elevadas a Altas Potências 89

Completando o Quadrado

Seu objetivo matemático ao completar o quadrado é reescrever a equação quadrática de modo que seja não somente fatorável, como também um quadrado perfeito. Pode parecer complicado, mas há um procedimento muito específico a ser seguido para cada problema desse tipo, o que ilustro no exemplo a seguir.

Exemplo 1: Resolva a equação

completando o quadrado.

Solução: Perigo! Você nunca pode completar o quadrado, a menos que o coeficiente principal (o coeficiente de x^2) seja 1, mas isso é mais facilmente remediado aqui.

Simplesmente divida tudo pelo coeficiente principal de 2 (contanto que você divida uma equação inteira por uma constante, as soluções não são afetadas).

$$x^2 - 6x + 2 = 0$$

Agora, mova a constante para o lado direito da equação. Isso é diferente das técnicas de fatoração e da fórmula quadrática – pois ambas requerem que uma equação seja definida como igual a 0.

$$x^2 - 6x = -2$$

Aqui está a etapa-chave para

Ponto Crítico

completar corretamente o

quadrado. Multiplique o coeficiente

Quando você pegar a metade
do coeficiente de x (no caminho
do termo x por $1 - 6$

. Eleve-o

2 :

$$= -$$

2

3

para fazer o quadrado do

ao quadrado $(-3)^2$

resultado e adicioná-lo a

$= 9$. Adicione esse

valor a ambos os lados da equação.

ambos os lados), preste atenção

especial no resultado (neste

caso, -3). Esse será o número que

$$x^2 - 6x + 9 = -2 + 9$$

aparece perto de x quando você

finalmente reescreve a expressão

Se tiver feito tudo corretamente,

quadrática como um quadrado:

a expressão quadrática no lado

. Isso transforma até

esquerdo da equação deverá

mesmo a fatoração de quadrados

ser fatorada em dois binômios

perfeitos em algo muito fácil.

combinados, neste caso $(x - 3)(x - 3)$,

que podem ser escritos como um

termo ao quadrado $(x - 3)^2$.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 89

22/05/2014 14:51:52

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\frac{b}{2a}$$

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Parte 2: Equações e Funções Não Lineares

$$(x - 3)^2 = 7$$

Resolva essa equação tomando a raiz quadrada de ambos os lados e isolando o x : Assim, há duas soluções para a equação $x^2 - 12x + 4 = 0$: e

.

A Fórmula Quadrática

A *fórmula quadrática* permite que você encontre as soluções para a equação quadrática

substituindo seus coeficientes a , b e c nesta fórmula: Depois de memorizar a fórmula (faça isso agora mesmo, se ainda não tiver feito), tudo o que você precisa fazer é garantir que a expressão quadrática que está tentando resolver seja definida como igual a 0, colocar os coeficientes nos lugares certos e simplificar.

A fórmula quadrática não é mágica. Ninguém simplesmente tropeçou nela um dia. É, na verdade, o que você obtém quando resolve a equação completando o quadrado. O processo é, de fato, bastante simples. Então, deixe-me explicar como funciona.

Lembre-se: o coeficiente principal de

deve ficar igual a 1. Então, divida

tudo por a , como dividiu por 2 no Exemplo 1 (e mova a constante para a direita).

Multiplique o termo do meio por 1 para obter o quadrado do resultado 2

. Essa fração deve ser adicionada a ambos os lados da equação: Fatore o lado esquerdo e adicione as frações à direita, certificando-se de estar usando os denominadores comuns.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 90

22/05/2014 14:51:54

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \pm \sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(2)(4)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{112}}{4}$$

$$x = \frac{12}{4} \pm \frac{4\sqrt{7}}{4}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{7}$$

Capítulo 7: Funções e Equações Elevadas a Altas Potências 91

Resolva para x e você acabará com a fórmula quadrática.

É um pouco difícil. Então, não entre em pânico se não estiver compreendendo tudo. Ocorre-me que talvez você esteja um pouco curioso para ver se tem todo o conhecimento matemático necessário para gerar essa fórmula sozinho.

Exemplo 2: Resolva a equação do Exemplo 1

novamente – desta

vez, usando a fórmula quadrática.

Solução: A equação já está na forma

(pois está definida como igual

a 0), então, substitua $a = 2$, $b = -12$ e $c = 4$ na fórmula quadrática e

simplifique. (No Exemplo 1, você dividiu tudo por 2 para obter $x^2 - 6x + 2 = 0$, e eu disse a você que isso não afetaria as respostas. Assim, você também pode vincular esses coeficientes ($a = 1$, $b = -6$ e $c = 2$) à fórmula quadrática, e obter a mesma resposta.) Essa é a mesma resposta obtida completando o quadrado no Exemplo 1.

Você Tem Problemas

Problema 1: Resolva a equação $3x^2 - 15 = 6x$ duas vezes, uma vez completando o quadrado e uma vez pela fórmula quadrática. Você deverá obter a(s) mesma(s) resposta(s).

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 91

22/05/2014 14:51:54



92

Parte 2: Equações e Funções Não Lineares

Encontro Judicial com as Raízes

Se você assiste ao seriado *C.S.I.* – ou mesmo a um de seus inúmeros subprodutos, como *C.S.I. Miami* ou *C.S.I. Escola de Palhaços* –, sabe que a perícia criminal é o estudo de pistas minúsculas e microscópicas da cena de um crime. Como o assassino (normalmente) não vai simplesmente dar um passo a frente e confessar seu crime, os detetives da divisão de homicídios (seguindo a liderança de solucionadores de crimes de sucesso, como Fred, Daphne, Velma, Salsicha e, é claro, Scooby Doo), devem procurar pistas.

Na terra de Scooby Doo, essas pistas são bastante óbvias: máscaras de lobisomens de borracha, projetores de filmes antigos usados para simular fantasmas e assim por diante. Mas na vida real as pistas são muito mais sutis. Cabelo, fibras, pegadas ou um pouco de sangue caído (ainda que aparentemente em quantidade pequena e insignificante) podem dar um rumo à investigação e, por fim, fornecer evidências que levem a uma condenação.

Calcular as soluções de equações não é fácil quando os graus são

maiores do que 2.

Não há fórmulas objetivas e facilmente memorizadas como a fórmula quadrática, que fornece soluções instantaneamente de um polinômio cúbico, quártico, quántico ou outro. Você terá de conduzir sua própria investigação da cena do crime (*C.S.I. do C.D.F. da Matemática*) para obter algumas informações sobre a equação e identificar suspeitos de soluções prováveis. Em uma grande parte deste capítulo, treinarei você em como verificar uma cena de crime de equações e apresentarei as ferramentas que o ajudarão a obter as respostas de equações complexas.

Equações vs. Funções

Preciso ajustar seu pensamento por um minuto. Preciso que você visualize equações de uma maneira um pouco diferente: como funções. Para todos os objetivos e metas, a resolução de uma equação de polinômios (que é nosso foco nas próximas páginas) é a mesma coisa que o cálculo das *raízes* de um polinômio, os valores de x em que essa função terá um valor de 0.

Fale a Linguagem

As **raízes** de uma função são os números que fazem a função ser igual a 0.

Assim, se c é a raiz da função $g(x)$, então $g(c) = 0$ (por causa disso, as raízes também são chamadas de **zeros** de uma função). Falando em termos de gráfico, as raízes de uma função são os interceptores de x do gráfico. Isso faz sentido, pois, se c é uma raiz da $g(x)$ (e, assim, $g(c) = 0$), o ponto do eixo x ($c, 0$) deve estar no gráfico da $g(x)$.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 92

22/05/2014 14:51:54

Capítulo 7: Funções e Equações Elevadas a Altas Potências 93

Para transformar uma equação em uma função, simplesmente resolva-a para 0 e substitua o 0 pela notação da função, como em $f(x)$ ou $g(x)$. Por exemplo, as soluções para a equação também serão as raízes da função

. Como você pode observar, nada mudou drasticamente lá.

Todos os termos são os mesmos; o que você fez basicamente foi

colocar todos eles em um lado da equação e colar o rótulo da função do outro lado. Agora que você está lidando com uma função, no entanto, pode tentar aplicar todos os exames de perícia que estou prestes a apresentar.

O Teorema Fundamental da Álgebra

Ao tentar calcular as raízes de uma função, seria bom, pelo menos, saber quantas você está procurando. Essa resposta é fornecida pelo *Teorema Fundamental da Álgebra*, segundo o qual a função de um polinômio com grau n sempre terá exatamente n raízes. Em outras palavras, um polinômio cujo grau mais alto é 3

terá exatamente três raízes.

Mesmo que o Teorema Fundamental seja útil, há duas coisas um pouco complicadas em relação a sua implementação e que você precisa lembrar:

As raízes podem se repetir. Infelizmente, as raízes não são necessariamente exclusivas. Não poderia ser mais fácil encontrar as raízes de $f(x) = (x + 1)(x + 1)(x - 7)$. Como está fatorado, tudo o que você precisa fazer é definir cada fator como igual a 0 e resolver, como fez para resolver equações quadráticas simples. Você obterá as raízes de -1 , -1 e 7 .

Tecnicamente, essa equação tem três raízes, mesmo que duas delas sejam exatamente iguais. Neste problema, -1 é denominada a *raiz dupla* porque ocorre duas vezes na solução. (Caso você esteja se perguntando, você só precisa escrever a resposta uma vez.)

Pode ser que as raízes não sejam bonitas. Uma função pode ter raízes irracionais ou complexas, que não são tão fáceis de calcular quanto as raízes racionais. Ainda assim, depois de identificar essas raízes racionais, as raízes mais feias são muito mais fáceis de calcular, conforme você verá no Exemplo 5b, no fim deste capítulo.

Agora que você sabe quantas raízes uma função pode ter, é hora de começar a descobrir o que são elas.

Teste do Coeficiente Principal

Embora isto não seja completamente conveniente, o teste do coeficiente principal pelo menos fornece alguma ideia sobre o gráfico

22/05/2014 14:51:54

94

Parte 2: Equações e Funções Não Lineares

se dirigem ao infinito – o que os matemáticos denominam de “comportamento final” da função. Tudo o que você precisa para esse teste é do grau da função e (como deve ter adivinhado, com base no nome) do coeficiente principal da função.

Aqui estão algumas conclusões a que podemos chegar:

As extremidades de uma função com um grau par apontam para a mesma direção. Se o coeficiente principal é positivo, ambos apontam para cima. (Imagine em sua cabeça o gráfico de $f(x) = x^2$, que tem grau 2 e um coeficiente principal positivo; a forma de U, o gráfico em parábola, aponta para cima em ambas as extremidades.) Por outro lado, se o coeficiente principal é negativo, ambas as extremidades do gráfico apontam para baixo.

As extremidades de uma função com um grau ímpar apontam para direções opostas. Se o coeficiente principal é positivo, a extremidade esquerda aponta para baixo e a extremidade direita aponta para cima (como o gráfico da $g(x) = x^3$). Por outro lado, um coeficiente principal negativo indica uma extremidade esquerda que aponta para cima e uma extremidade direita que aponta para baixo.

Caso você esqueça das regras de ouro, há outro jeito (um pouco mais longo) de descobrir o comportamento do extremo de uma função: substitua um número verdadeiramente enorme (como 5.000) por um número negativo imenso (como -5.000) na função e veja se seu resultado é positivo ou negativo. Por exemplo, se $f(-5.000) = 729.300$, então é claro que a extremidade esquerda da $f(x)$ está direcionada para cima.

Exemplo 3: Descreva o comportamento da extremidade da

Solução: O grau da $j(y)$ é ímpar (3), então, as extremidades da $j(y)$ apontam para direções opostas. Como o coeficiente principal é negativo (-5), você pode concluir que a extremidade esquerda aponta para cima e a extremidade direita do gráfico vai para baixo.

A Regra dos Sinais de Descartes

Você usa a regra dos sinais de Descartes para adivinhar de maneira inteligente quantas raízes positivas e negativas uma função terá. Infelizmente, isso costuma ser apenas uma adivinhação, e nem sempre você obterá respostas definitivas. Em vez de um resultado mais promissor como “ $f(x)$ terá uma raiz positiva e duas negativas”, a Regra dos Sinais de Descartes resultará neste tipo de conclusão: “ $f(x)$ terá uma, três ou cinco raízes positivas e zero, duas ou quatro raízes negativas”.

Acredite ou não, essas informações costumam ser muito úteis, como você verá no Exemplo 4. A Regra dos Sinais de Descartes funciona assim:

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 94

22/05/2014 14:51:54



Capítulo 7: Funções e Equações Elevadas a Altas Potências 95

1. Coloque a função na forma padrão. Os termos precisam estar em ordem, desde o expoente mais alto até o mais baixo, ou o teste não funcionará.

2. Conte as mudanças de sinais. Comece com o primeiro termo e, então, vá, um por um, até o último, contando o número de vezes em que os termos mudam o sinal. Por exemplo, a função tem duas

mudanças de sinais (elas ocorrem depois do segundo termo, mudando de negativo para positivo, e depois do terceiro termo, mudando de volta para negativo). O número (neste caso, 2) é um possível número, com raízes positivas para a função.

Ponto Crítico

A Regra dos Sinais de Descartes não é como a divisão longa ou sintética. Você não precisa preocupar-se se as potências estiverem faltando quando você contar as mudanças de sinal. Não é necessário reescrever como

, pois os coeficientes ausentes são todos 0, que não

é positivo nem negativo, então, eles não contam para mudanças de sinal.

3. Subtraia múltiplos de 2. Tome o número de mudanças no sinal que você obteve na última etapa e subtraia os múltiplos de 2 até obter um número negativo. Todos os resultados não negativos (incluindo 0) são contagens de raízes positivas possíveis. Por exemplo, se a etapa 2 fornece sete mudanças de sinais para uma função $m(x)$, então $m(x)$ deve ter sete, cinco, três ou uma raiz positiva. Se uma função $b(y)$ tem seis mudanças de sinal, ela deve ter seis, quatro, duas ou zero raízes positivas.

4. Encontre as raízes negativas. Retorne à função original e substitua $-x$ por x . Conte as mudanças de sinal novamente e subtraia os múltiplos de 2 para calcular o número de raízes negativas possíveis.

Por mais estranha que essa técnica seja, com todas suas subtrações de 2 e resultados ambíguos, ela pode fornecer uma quantidade incrível de informações para a pequena quantidade de trabalho necessária. Lembre-se de que esse teste fornece informações somente sobre as raízes de números reais de uma função, não de complexos. É por isso que os números complexos não são “positivos” e “negativos”

no mesmo sentido dos números reais e, então, são excluídos do teste.

Exemplo 4: Aplique a Regra dos Sinais de Descartes à função

.

Solução: A função já está na forma padrão, então, você pode contar imediatamente as mudanças de sinal. São três, porque os sinais mudam entre cada um dos quatro



96

Parte 2: Equações e Funções Não Lineares

termos. Assim, a função tem três raízes positivas ou uma raiz positiva. (Não se esqueça de subtrair 2 da contagem de mudança de sinal para obter outras respostas possíveis, até que subtrair 2 não faça mais sentido. Dizer que há “-1 raízes positivas possíveis”, por exemplo, é coisa de louco.) Agora, avalie $h(-x)$ substituindo $-x$ para cada x na função e simplificando.

$$h(-x) = 4(-x)^5 - (-x)^2 + 2(-x) - 11$$

$$h(-x) = -4x^5 - x^2 - 2x - 11$$

Observe que todos os termos que contêm um expoente ímpar têm um sinal diferente do que tinham na função original $h(x)$. O número total de mudanças de sinal aqui é zero, tudo é negativo. Desse modo, $h(x)$ não tem raízes negativas. Você entende por que a Regra dos Sinais de Descartes é tão útil para esse problema? De acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra, $h(x)$ deve ter cinco raízes (já que tem grau 5), mas tem somente três ou uma raiz(es) real(is), que é(são) positiva(s). É possível concluir que as outras raízes (haverá oito ou quatro, dependendo do número de raízes positivas) são complexas.

Teste da Raiz Racional

Vamos revisar: você sabe quantas raízes uma função polinomial deve ter (o Teorema Fundamental da Álgebra), onde os limites do seu gráfico devem chegar (o Teste do Coeficiente Principal) e aproximadamente quantas raízes reais positivas e negativas a função terá (a Regra dos Sinais de Descartes). Até aí tudo bem. Mas você está se perguntando quando vamos descobrir quais são essas raízes. Agora mesmo!

O teste da raiz racional dá uma longa lista de

raízes racionais possíveis para uma função. A

Fale a Linguagem

palavra-chave aqui é *possíveis*. Até o fim do

O teste da raiz

teste, você acabará gerando uma longa lista de

racional garante que uma função

números inteiros e frações, alguns dos quais

com o coeficiente principal a e a

poderiam ser raízes da função. Infelizmente,

constante c tenham raízes racionais da

o teste da raiz racional não revela quais *são*

forma $\pm y$, onde y é um fator de c e x as raízes – você terá de verificar isso por si

x

mesmo. Por sorte, não é tão difícil fazer isso;

é um fator de a .

de fato, você usará uma técnica que já revisei

no Capítulo 3.

Veja a seguir como aplicar o teste da raiz racional.

PF_CG_TCIG_Pre-Calculus.indb 96

22/05/2014 14:51:55

$$-4, -2, -1, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1, 2$$

1. **Identifique o coeficiente principal e a constante na função.** Falo do coeficiente principal, como a , e da constante, como c . Ignore os sinais de a e c — se a função tiver um coeficiente principal de 4 ou -4 (ou uma constante de 10 ou -10), isso não é importante para esse teste, somente o número importa.

2. **Liste todos os fatores de a e c separadamente.** Note que você não está criando a fatoração de primos, somente listando todos os números que dividem a e c inteiramente. Por exemplo, embora 12 tenha uma fatoração por primos de , sua lista de fatores é 1, 2, 3, 4, 6 e 12.

3. **Escreva todas as combinações possíveis dos fatores de c divididos pelos fatores de a .** Em outras palavras, liste todas as frações possíveis em que o numerador é um fator de c e o denominador é um fator de a . O jeito mais fácil de fazer isso é tomar o primeiro fator de c e usar cada fator de a como um denominador diferente. Então, use o segundo fator de c e assim por diante.

Por exemplo, digamos que $c = 4$ e $a = 5$. Os fatores de c são 1, 2 e 4, e os fatores de a são 1 e 5. Divida o primeiro fator de c por cada fator de a : 1 e 1.

1 5

Agora, faça o mesmo com o segundo fator de c ()

2

2

1 e o último fator

5

de c ()

4

4

1 e

. Você acabará com esta lista final de números racionais:

5

1 2 4

, , , 1, 2, e 4 .

5 5 5

4. Inclua o oposto de cada item na lista que você acabou de gerar para obter a lista final de raízes possíveis. Isso dobra o número de raízes racionais que você obteve na etapa 3 marcando o lado oposto de cada uma. Então, a lista final de raízes racionais possíveis para a função é esta: e 4.

Quaisquer desses doze números poderiam ser raízes de *qualquer* função da qual o coeficiente principal seja 5 e a constante seja 4. Assim, essa é a lista possível de raízes para a função , bem como a função

.

(Lembre-se de que no teste da raiz racional, os sinais de a e c são irrelevantes, graças à etapa 4, que torna as versões positivas e negativas de cada raiz uma possibilidade.) **Você Tem Problemas**
Problema 2: Identifique todas as raízes racionais possíveis da função

.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 97

22/05/2014 14:51:56

98

Parte 2: Equações e Funções Não Lineares

Fechando a Mala

Embora o teste da raiz racional identifique uma lista de suspeitos em potencial, você deve descobrir quais suspeitos são, de fato, raízes. Antes de iniciar, contudo, quero que lembre-se de uma coisa: se r é uma raiz da função $f(x)$, então $(x - r)$ será um fator de $f(x)$ e vice-versa.

Por exemplo, -3 é claramente uma raiz da $g(x) = x^2 - 9$, porque $g(-3) = (-3)^2 - 9 = 0$.

Assim, você automaticamente sabe que $(x - (-3))$, que é igual a $(x + 3)$, é um fator da $g(x)$. Isso não é uma grande surpresa, porque a $g(x)$ é a diferença dos quadrados perfeitos e fatorada em $(x + 3)(x - 3)$. Quando as funções não são muito fáceis de fatorar, contudo, é útil

lembrar dessa relação.

Quando você é solicitado a fatorar uma função ou encontrar suas raízes (de acordo com o que acabei de dizer, elas equivalem à mesma coisa) e seu grau é 3 ou mais, aqui está o que você deve fazer: 1.

Gerar uma lista de raízes possíveis usando o teste da raiz racional. Não esqueça de incluir a versão positiva e negativa de cada uma.

2. **Use a Regra dos Sinais de Descartes para reduzir a lista.** Se você descobrir que só pode haver uma raiz negativa, por exemplo, depois de encontrá-la, pode riscar com segurança todos os outros números negativos da lista de suspeitos.

3. **Teste as raízes usando a divisão sintética.** Se sobrar um resto de 0, o número em questão é definitivamente uma raiz, caso contrário, não é. Depois de encontrar uma raiz, use o quociente resultante para descobrir a outra raiz em vez de usar a função original novamente. (Isso torna as coisas um pouco mais fáceis porque o quociente é sempre um grau a menos que a função original, e é provavelmente mais curto também.) **Como Você Fez Isso?**

Na Etapa 3, eu disse a você que o resto 0 significa que o número que você está testando é uma raiz de uma função. Essa conclusão é baseada em um princípio matemático denominado **Teorema do Resto**, segundo o qual: se uma função $f(x)$ é dividida pelo binômio $(x - a)$, então $f(a) = r$ (o resto).

Em outras palavras, o resto obtido ao dividir sinteticamente uma função por algum valor será o mesmo do resultado da aplicação deste valor à função.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 98

22/05/2014 14:51:56

Capítulo 7: Funções e Equações Elevadas a Altas Potências 99

Testar as raízes na etapa 3 pode se tornar um pouco frustrante, pois você normalmente terá que tentar bastante para achar uma que funcione. Não desista, continue! Se você se sentir completamente emperrado, tente desenhar um esboço rápido da função indicando alguns pontos; lembre-se de que as raízes de uma função são também seus interceptores do eixo x . Então, se os pontos que você está indicando estão realmente perto do eixo x , você sabe que também está chegando perto de uma raiz.

Exemplo 5: Calcule todas as raízes das funções:

a.

Solução: A Regra dos Sinais de Descartes afirma que há duas ou zero raízes positivas, mas que há somente uma raiz negativa possível. A raiz racional gera esta lista de possibilidades: $-8, -4, -2, -1, 1$

$-1, 1$

$2, 2, 1, 2, 4, 8$.

Você deve provavelmente começar com os menores números inteiros no início, pois eles são mais fáceis de dividir. Entretanto, se você tentar 1 e -1 , ambos têm restos diferentes de zero. Por sorte, o 2 não tem.

$2 \ 2 \ 3 \ 1$

-8

8

4

14

8

—

$2 \ 7$

-4

0

Então, 2 é uma raiz. Depois de dividi-la, você obteve o quociente $2x^2 + 7x - 4$, que pode ser fatorado usando o Método bomba (consulte o Capítulo 4): $(2x - 1)(x + 4)$. Para obter as duas raízes finais, defina cada um dos fatores como igual a zero e resolva; você obterá 1 e -4 . Desse modo, as

raízes da $f(x)$ são $-4, 1$ e 2 .

2

b.

Desta vez, a possível lista de raízes é notadamente pequena, somente 1 e -1

poderiam ser raízes da função. A Regra dos Sinais de Descartes aparentemente confirma isso, declarando que haverá três ou uma raiz(es) positiva(s) e somente uma raiz negativa. Vejamos se -1 é a raiz negativa solitária: -1 1 -3 0 3 -1

-1 4 -4 1

1 -4 4 -1 0

Excelente, -1 é uma raiz. Agora use a linha inferior de números desse problema de divisão para ver se 1 também é uma raiz:

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 99

22/05/2014 14:51:57

$$m = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

100 Parte 2: Equações e Funções Não Lineares

1 1 -4 4

1

1 3

1

1

3

1 0

Então -1 e 1 são raízes, e você foi deixado com a expressão quadrática $x^2 - 3x + 3$, que não é fatorável. Isso significa que as duas raízes restantes devem ser irracionais ou complexas. De qualquer modo, você pode calculá-las usando a fórmula quadrática porque funciona com qualquer expressão quadrática, não importa o quanto suas raízes são feias.

As raízes da $g(x)$ são -1 , 1 ,

e

.

Você Tem Problemas

Problema 3: Calcule todas as raízes da

.

O Mínimo que Você Precisa Saber

As equações quadráticas podem ser resolvidas pelo método de fatoração, completando o quadrado ou por meio da fórmula quadrática.

O teste do coeficiente principal descreve o comportamento final de uma função.

A Regra dos Sinais de Descartes ajuda a estimar quantas raízes positivas e negativas uma função possui.

Todas as raízes racionais possíveis de uma função podem ser listadas usando o teste da raiz racional.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 100

22/05/2014 14:51:58

8

Capítulo

Funções Logarítmicas

Neste Capítulo:

Compreensão da notação de logaritmos

Características do gráfico de um logaritmo

Reescrever expressões usando as propriedades logarítmicas

Aplicação da fórmula da mudança de base

Sentirei falta de muitas coisas dos anos 1990. Foi uma década legal para mim, porque minhas melhores memórias estão aninhadas nesse curto intervalo de dez anos. Fui para a faculdade, consegui um bom emprego, conheci a mulher dos meus sonhos, comprei minha primeira casa, escrevi meu primeiro livro e comi meu primeiro kiwi (talvez não seja tão importante quanto os outros acontecimentos, mas é uma boa evidência de uma vida farta, pelo menos no que diz respeito a seus frutos). Ainda assim, aquilo que me dá mais saudades dos anos 1990 é o Chihuahua da Taco Bell.

Nunca antes (pelo menos na minha memória) uma enorme empresa de *fast food* confiou suas vendas a um Chihuahua falante agitado e de orelhas pontudas. Ela tinha até a sua própria frase de efeito (o cão era uma fêmea, mas a voz era de um comediante masculino, então os pronomes de gênero ficam um pouco complicados, como às vezes acontece quando se escreve sobre cachorros): “*Yo quiero Taco Bell!*”. Eu não sei nada de espanhol, mas acho que uma tradução tosca disso seria: “Taco Bell me dá muita azia, então recomendo que você coma outra coisa no jantar.”

PF_CG_TCIG_Pre-Calculus.indb 101

22/05/2014 14:51:58



102 Parte 2: Equações e Funções Não Lineares

Não sentirei saudades da expressão, nem do cão, nem da queimação, mas do primeiro comercial, no qual o diretor (deve ter sido Orson Welles) colocou o cão para falar na televisão. Acredite ou não, as primeiras palavras do cão, em resposta a Alex Trebek, foram “O que é um logaritmo?”.

Uma versão mais curta do comercial ia ao ar com mais frequência que a versão integral, mas não tinha a questão matemática. Só posso supor que isso é porque poucas pessoas no Brasil entendiam o que o cão estava dizendo (aposto que é uma expressão que você nunca esperou ver impressa). Neste capítulo, apresentarei a você um cãozinho inteligente e que virou um ícone e explicarei exatamente o que é um logaritmo e por que você deve se importar com isso (embora eu não possa garantir que isso não lhe fará sentir azia).

Avaliação de Logaritmos

Uma *expressão logarítmica* $\log x$ tem *base* a e *argumento* x , é lida como “logaritmo na a

base a de x ” e seu valor é de fato igual a um expoente.

Essencialmente, a equação $\log x = y$ pode ser traduzida como “Quando a é elevado à potência y , você obtém x ”.

a

Assim, a equação logarítmica $\log 9 = 2$ é verdadeiro porque $3^2 = 9$.

3

Embora as expressões logarítmicas talvez não façam muito sentido num primeiro momento,

Fale a Linguagem

elas são muito fáceis de avaliar, porque você

A expressão

pode escrevê-las na forma exponencial.

logarítmica $\log x$ tem um valor

a

Exemplo 1: Determine o valor de x em cada

que responde à pergunta “Em qual

uma das expressões logarítmicas a seguir:

potência devo elevar a **base**, a , para

obter x (o **argumento**)?”. Note que

a. $\log 1.000 = x$

10

a base de uma função logarítmica

Essa equação se traduz em “10 elevado

será um número positivo não igual a

a qual potência é igual a 1.000?” e pode

1 (porque 1 em qualquer potência é

ser reescrita na forma exponencial deste

igual a 1, uma base logarítmica 1 é

modo: $10^x = 1.000$. A resposta é $x = 3$.

completamente desinteressante).

b. $\log 2 = x$

8

Esta é um pouco mais complicada. Você está essencialmente resolvendo a equação $8^x = 2$. Como na vida é possível elevar um número a um expoente e acabar com algo menor como resultado? É fácil se você notar que 8 e 2 são potências de 2, e reescrever 8 como 2^3 e 2 como 2^1 : PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 102

22/05/2014 14:51:58



Capítulo 8: Funções Logarítmicas

103

Como os dois lados são iguais, seus expoentes devem ser iguais também, então $3^x = 1$, e, desse modo,

.

c.

Isso se traduz na expressão exponencial $x^5 = 32$, e o único número que resulta em 32 ao ser elevado à quinta potência é $x = 2$.

Você Tem Problemas

Problema 1: Determine o valor de x em cada expressão logarítmica: a.
 $\log x = 3$

5

b. $\log 7 = x$

7

c.

Representação Gráfica de Logaritmos

Depois de saber qual é a aparência
de um gráfico logarítmico genérico,

Ponto Crítico

$f(x) = \log x$, você pode usar as

Caso você esteja curioso, os

a

transformações de funções

gráficos das 12 funções básicas

que aprendeu no Capítulo 6

que você terá aprendido até o

para deslocar, esticar e refletir

final do livro são, x^2 , x^3 , x , ,

esse gráfico, para a alegria de

$\log x$, a^x , $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$, seu coração (seu coração pode

a

$\cot x$, $\sec x$ e $\csc x$ de x . (Se você realmente ficar alegre
simplesmente

não tem ideia do que são as últimas

por esboçar funções logarítmicas,

quatro, não se preocupe, elas serão

embora eu duvide disso). Em outras

apresentadas no Capítulo 11.)

palavras, você precisa memorizar

esse gráfico e adicioná-lo a seu

repertório. Antes de terminar este

livro, o número de gráficos de funções básicas que você precisará saber de cor terá subido de 4 no Capítulo 6 para um numeroso total de 12.

Todos os gráficos logarítmicos têm basicamente a mesma forma (e que forma, tenho certeza de que todos fazem ginástica, acredite). Então, selecionarei a função logarítmica ($f(x) = \log x$) e indicarei alguns pontos para ter uma ideia de seu gráfico. A primeira 2

coisa que você perceberá é que os argumentos negativos da $f(x)$ não fazem sentido. Por exemplo, $f(-4) = \log(-4)$, que faz a pergunta “2 elevado em qual potência resulta em um 2

valor de -4 ?”. Esse valor não existe, não há modo de transformar um número positivo PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 103

22/05/2014 14:51:59

104 Parte 2: Equações e Funções Não Lineares em um número negativo usando somente um expoente (mesmo um expoente negativo não afetará seu sinal, só gerará um recíproco).

Com isso em mente, vou substituir somente números positivos para x . Serão necessários somente alguns valores de x (que selecionarei manualmente e com cuidado no quadro a seguir) para ter uma boa ideia do gráfico da $f(x)$. Cada linha começa com o valor de x sendo substituído, coloca a pergunta: “2 elevado em qual potência fornece esse valor?” e responde a essa pergunta na última coluna.

Agora represente graficamente os cinco pares coordenados criados pelo quadro: 1

, 1

, (1,0), (2,1) e (8,3). Você chegará na Figura 8.1.

16, -4 , 2 , -1

Figura 8.1

O gráfico da $f(x) = \log x$

2

com os cinco pontos que

eu usei para representar o

gráfico destacado.

12, - 1

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 104

22/05/2014 14:52:00

Capítulo 8: Funções Logarítmicas

105

O gráfico de $\log x$, bem como qualquer outra função logarítmica não transformada, 2

tem algumas características importantes que não somente ajudam a desenhar o gráfico, mas também fornecem uma compreensão melhor sobre os logaritmos:

O gráfico não contém valores negativos de x . Lembre-se de que não há expoente que possa mudar o sinal de sua base. Desse modo, os números negativos não são entradas válidas para uma função logarítmica, e isto está refletido no gráfico porque ele não contém valores negativos de x .

O eixo y é uma assíntota vertical do gráfico (para obter mais informações sobre assíntotas, verifique o Capítulo 6). Um argumento de 0 pode ser impossível, mas o gráfico ficará infinitamente mais perto desse valor impossível, representado pela linha vertical $x = 0$.

O gráfico está abaixo do eixo x até $x = 1$. Valores pequenos de x

(entre 0 e 1) são argumentos menores que a base (que é 2), então o resultado terá de ser um número negativo (porque representa um expoente negativo). Por exemplo, um argumento de se traduz na expressão $\log 1$

2 4, que é igual a -2 .

O gráfico contém o ponto (1,0). Ao aplicarmos 1 a uma função logarítmica, estamos perguntando “A qual potência devo elevar a base para obter um valor final de 1?”. O único valor com essa propriedade é 0 porque qualquer número elevado na potência 0 é igual a 1 (exceto 0, que, de qualquer modo, não é uma base logarítmica válida).

O gráfico cresce bem devagar depois de cruzar o eixo x. Esse crescimento rápido e inclinado que ocorre entre $x = 0$ e $x = 1$ não pode ser encontrado depois que o gráfico cruza o eixo x. Cada unidade positiva do gráfico da $f(x)$ que se desloca verticalmente, deve deslocar uma potência de 2 horizontalmente, e os expoentes aumentam rapidamente. Observe na Figura 8.1 que só foram necessárias oito unidades horizontais para a $f(x)$ aumentar de uma altura infinitamente negativa para uma altura positiva de 3 (porque $2^3 = 8$). Então serão necessárias mais oito unidades horizontais antes que o gráfico aumente somente *uma unidade a mais* até uma altura de 4 (porque $2^4 = 16$).

O gráfico atinge uma altura de 1 no argumento correspondente a sua base. Na Figura 8.1, o gráfico passa pelo ponto (2,1) porque a base do logaritmo é 2. Se você estivesse representando graficamente $y = \log x$, o 18

gráfico teria passado pelo ponto (18,1). Sempre que a base e o argumento são correspondentes, você se pergunta: “Em qual expoente devo elevar a base de modo que seu valor fique exatamente o mesmo?”. A resposta é sempre 1.



106 Parte 2: Equações e Funções Não Lineares

Ponto Crítico

Se a base de um logaritmo for igual à base de seu argumento, a resposta é o expoente do argumento. Por exemplo,

. Se a base e o argumento

forem exatamente iguais (como na expressão $\log 4$), a expressão terá um valor 4

de 1 (o expoente deduzido da entrada). Se você reescrever os logaritmos na forma exponencial, a razão se torna clara:

se torna

, o que é

definitivamente verdadeiro.

A representação gráfica de uma função logarítmica não requer novas habilidades, contanto que você se lembre das transformações das funções.

Exemplo 2: Esboce o gráfico da função $g(x) = \log(-x) + 2$

3

.

Solução: Comece com a versão não transformada desta função: $y = \log x$. Todos 3

os logaritmos básicos passam pelo ponto (1,0) e têm o eixo y como uma assíntota vertical. Além disso, essa função atingirá a altura de 1 quando x for igual à base, então o gráfico do $\log x$ 3

deve passar pelos pontos (3,1). Desenhei o gráfico de

$$y = \log x$$

3 como uma curva pontilhada na Figura 8.2. Agora é hora de aplicar as transformações neste gráfico.

Um $-x$ dentro da função (em vez de x) indica que é para refletir o gráfico no eixo y ; então você deve mover o gráfico inteiro em até duas unidades (por causa do “+ 2”

na extremidade da função). Compare o gráfico não transformado de $y = \log x$ 3 e o

gráfico final da $g(x) = \log(-x) + 2$

3

na Figura 8.2 para visualizar essas transformações.

Figura 8.2

O gráfico da $g(x)$

é simplesmente o

gráfico de

$$g(x) = \log(-x) + 2$$

3

$$y = \log x$$

3, depois de

estar refletido no

$$y = \log x$$

3

eixo y , movido duas

unidades para cima

e com um novo corte



Capítulo 8: Funções Logarítmicas

107

Como Você Fez Isso?

Problema 2: Represente graficamente a função $f(x) = -\log(x + 3)$.

5

Logaritmo Comum e Natural

A matemática usa muitos tipos de logaritmos porque há um número infinito de bases que podem ser usadas em uma função logarítmica. Se você já deu uma boa e detalhada olhada em uma calculadora, perceberá que ela suporta somente dois tipos de logaritmos no mar infinito de possibilidades: o *logaritmo comum* e o *logaritmo natural*.

O logaritmo comum tem base 10. É tão

comum usar isso que quando uma

expressão logarítmica é escrita sem a

Fale a Linguagem

base, supõe-se que tenha uma base 10.

Entende-se que o

Assim, as expressões $\log x^2$ e $\log x^2$

10

logaritmo comum, escrito $\log x$ e

significam exatamente a mesma coisa.

lido como “o log de x ”, tem base 10.

Antes de ficar achando isso muito

Supõe-se que o **logaritmo natural**

estranho, lembre-se de que você, de fato,

tem uma base de e ; é denotado por $\ln$

omite muitas coisas na matemática e

x e pode ser lido como “o logaritmo

supõe que são compreendidas; por

natural de x ” ou “L-N de x ”.

exemplo, y realmente significa $1 y^1$

(mesmo que nenhum expoente ou coeficiente estejam explícitos), e realmente

significa

(mesmo que o índice de 2 não tenha sido escrito na forma da raiz quadrada original).

O logaritmo natural também tem uma

base que não é escrita explicitamente;

ela é escrita como $\ln x$ de modo que

você não se confunda com o $\log x$. A

Alerta do Kelley

base do logaritmo natural, no entanto,

Euler, cujo nome

não é igual a 10, é igual a e . Você sabe

está indicado na constante e , é

o que é e ? É uma constante matemática

pronunciado “óiler”, não “Euler”.

predefinida, como i (que é igual a

– 1) ou π (que é igual a 3,1415...),

chamada número de Euler.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 107

22/05/2014 14:52:02

108 Parte 2: Equações e Funções Não Lineares Como π , o número de Euler é um número irracional, porque nunca se repete e termina), igual a aproximadamente 2,7182818284590452353602874713527... Por esse motivo, a notação e é muito útil; escrever o número 7 é muito mais fácil que escrever $\log$

7.

2,7182818284590452353602874713527...

Como essa base logarítmica é encontrada com muita frequência, você perceberá que as calculadoras científicas e gráficas têm botões para elas, o que transforma o cálculo de seus valores decimais exatos em brisa de primavera. Calcular esses valores decimais à mão é um exercício tão inútil quanto o de calcular raízes quadradas manualmente. Então, os matemáticos, mesmo aqueles que viram o nariz para a tecnologia, colocam com muita alegria os logaritmos nas calculadoras se os valores decimais são necessários.

Exemplo 3: Simplifique a expressão

.

Solução: A base do logaritmo é e , então essa expressão pergunta “ e deve ser elevado a qual potência para se obter e^2 ?”. Quando a base de um logaritmo (e) é igual à base de seu argumento (e^2), a resposta é o expoente; 2, neste caso.

A Fórmula da Mudança de Base

Se acreditou em mim quando eu disse que os logaritmos de base 10 e base e são usados com muita frequência em pré-cálculo (e você deve acreditar em mim, sou uma pessoa relativamente honesta), saiba que há mais informações. Você ainda se deparará com outras bases. É como se estivéssemos fazendo uma caminhada na floresta juntos e você me perguntasse “O que acontece se eu pisar em uma cobra venenosa?”, e eu respondesse dizendo “Não se preocupe, as cobras mais comuns aqui não são venenosas”. Eu posso estar certo, mas se você se deparar com uma que é venenosa, o veneno da mordida da cobra não vai passar por suas veias mais devagar só porque aquela era uma cobra improvável.

Vou deixar de lado essa metáfora apavorante de cobra por um segundo e explicar exatamente o que quero dizer. Na maioria das ocasiões, será esperado que deixe suas respostas com os logaritmos ainda dentro. Por exemplo, uma resposta final do $\log 13$ é completamente aceitável, porque não pode ser mais simplificado e não

é possível ser mais claro ou preciso. Ainda assim, em alguns exemplos

raros, será necessário saber exatamente qual é o valor decimal do $\log 13$.

7

Você poderia usar a lógica para adivinhar o valor. A expressão $\log 13$ pergunta 7

“7 em qual potência é igual a 13?”. Então sabe que seu valor é maior que 1

(porque $7^1 = 7$, que é menor que 13). Você também sabe que $\log 13$ deve ser 7

menor que 2 porque $7^2 = 49$, que é maior (bem maior, de fato) que 13. Então, usando seu cérebro grande e pulsante, poderia argumentar que $\log 13$ está entre 7

1 e 2 e está provavelmente mais perto de 1 que de 2. Infelizmente, esta resposta ainda não é muito precisa.

PF_CG_TCIG_Pre-Calculus.indb 108

22/05/2014 14:52:02



Capítulo 8: Funções Logarítmicas

109

Por sorte, você pode usar um pequeno truque de conversão denominado *fórmula da mudança de base* para calcular os logaritmos com bases diferentes de 10 e e . A fórmula tem esta aparência: ou

Em outras palavras, divida o logaritmo comum do argumento pelo logaritmo comum da base, ou, se preferir, divida o logaritmo natural do argumento pelo logaritmo natural da base. De qualquer modo, você obterá a mesma resposta. Assim, para calcular $\log 13$, você divide o

logaritmo comum de 13 pelo logaritmo comum 7

de 7. Lembre-se de que sua calculadora ficará muito feliz em calcular os valores dos logaritmos e em fazer a divisão para você.

Ponto Crítico

Você obtém o mesmo valor final para $\log 13$ se usar logaritmos naturais em vez de 7

logaritmos comuns.

$\log$

$\ln$

2,56494935746

713

13

$= = 1$

$\approx .,318$

$\ln 7$

1,94591014905

$\log 13$

$\log$

$= = \approx$

1,11394335

1,

713

318

$\log 7$

0,84509804

Exemplo 4: Determine o valor do de log 5 arredondado para três casas decimais.

3

Solução: Aplique a fórmula da mudança de base usando os logaritmos naturais ou comuns.

log

log

5

5

=

ln

3

log 3

log 5

5

=

3

ln 3

$\approx 0,698970004$

1,6094379

0,47712125

ou

$\approx 1,0986122$

$\approx 1,46497$

$\approx 1,46497$

Não esqueça de arredondar sua resposta em três casas decimais, como o problema indica: 1,465.

Você Tem Problemas

Problema 3: Determine o valor de $\log 19$, arredondando para três casas decimais.

2

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 109

22/05/2014 14:52:03



110 Parte 2: Equações e Funções Não Lineares

As Propriedades dos Logaritmos

As funções logarítmicas possuem três propriedades principais. Essas propriedades permitem que você manipule os logaritmos com dois objetivos em mente: comprimir as expressões em uma forma mais compacta (como desidratar a carne para conservá-la), ou fazer o oposto e expandir as expressões de uma notação compacta para uma notação longa e inchada. Cada propriedade pode ser usada para condensar ou expandir. Mostrarei a você como apresentá-las, uma de cada vez.

Alerta do Kelley

Você pode aplicar as

$\log a + \log b = \log ab$. Em outras palavras, a propriedades dos logaritmos somente

soma de quaisquer logaritmos (com a mesma

a logaritmos com a mesma base,

base) é igual ao logaritmo de seus produtos.

embora não importe qual seja a

Por exemplo, $\log 5 + \log 9 = \log 45$. (Se você

base. Não fique confuso. Mesmo

não acredita em mim, verifique usando uma

que eu tenha escrito as propriedades

calculadora.) Você também pode usar essa

usando logaritmos comuns, quaisquer

regra para voltar para trás. Por exemplo,

bases podem ser usadas, contanto

você poderia reescrever a expressão $\log$

que todas as bases no mesmo

50 como " $\log 25 + \log 2$ porque $25 \cdot 2 = 50$.

problema se combinem.

Aviso: O produto dos dois logaritmos não

é igual ao logaritmo da soma deles, então

$(\log a)(\log b) \neq \log(a + b)$.

. A diferença dos dois logaritmos (com a mesma base) é igual ao

logaritmo de seus quocientes. Isso faz muito sentido: se a soma de dois logaritmos for igual a um logaritmo contendo multiplicação, então a diferença de dois logaritmos (o oposto de uma soma) é igual a um logaritmo que contém divisão (o oposto da multiplicação). Usando essa propriedade, você poderia reescrever a expressão como

ou voltar atrás e

reescrever “ $\log 2$ ” como “ $\log 10 - \log 5$ ” (porque $10 \div 5 = 2$).

3

3

3

Você pode “baixar” o expoente do número que você está calculando e multiplicá-lo na frente do logaritmo. Assim, $\log 52 = 2\log 5$.

3

3

Você Tem Problemas

Você está se perguntando como a terceira propriedade do logaritmo funciona e por que

? Você pode provar com muita facilidade que essas duas expressões são equivalentes. Pense no

como

. De acordo com a propriedade do

primeiro logaritmo, o logaritmo de um produto pode ser reescrito como a soma dos logaritmos individuais:

Agora então você sabe que

, mas esses três termos

à direita do sinal de igualdade são termos semelhantes e podem ser

somados

. Desse modo,

.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 110

22/05/2014 14:52:03

$$x = \log \frac{1}{2}$$

$$x = -\log 2$$

$$x = -\log 2$$

$$x = \log 2^{-1}$$

$$x = \log 2^{-1}$$

$$\frac{1}{3} \log a - 2(\log b + \log c)$$

$$\frac{1}{3} \log a - 2 \log b - 2 \log c$$

$$\log \sqrt[3]{a} - \log b^2 - \log c^2$$

diferença dos logaritmos de seu numerador e denominador.

$$\ln (xy^2) - \ln z^3$$

O logaritmo natural à esquerda contém um produto (xy^2), que deveria ser expandido na soma de dois logaritmos:

$$\ln x + \ln y^2 - \ln z^3$$

Agora mova os expoentes de y e z para a frente de suas respectivas expressões logarítmicas por meio da terceira propriedade do logaritmo: $\ln x + 2\ln y - 3\ln z$ b. Compacte em um único logaritmo:

.

Solução: Comece distribuindo o -2 pelos parênteses:

. Agora use a última propriedade dos logaritmos

para transformar os coeficientes de volta em expoentes, notando que um expoente de 1 é igual a uma raiz cúbica:

.

3

A diferença dos dois primeiros logaritmos deve ser reescrita como o quociente de um único logaritmo:

. Agora divida essa fração

por c^2 , colocando-o no denominador:

.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 111

22/05/2014 14:52:04

112 Parte 2: Equações e Funções Não Lineares **Você Tem Problemas**

Problema 4: Use as propriedades dos logaritmos para reescrever as expressões: a. Expanda

b. Compacte em um logaritmo: $\ln (x - y) - 3\ln y$.

O Mínimo que Você Precisa Saber

Se

, então

.

O gráfico da $f(x) = \log_a x$ passa pelos pontos $(1,0)$ e $(a,1)$; o eixo y é sua

assíntota vertical.

Se nenhuma base é escrita para um logaritmo, compreende-se que seja 10; a base do logaritmo natural ($\ln x$) é e .

Três propriedades dos logaritmos permitem que você expanda e compacte expressões logarítmicas.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 112

22/05/2014 14:52:05

9

Capítulo

Funções Exponenciais

Neste Capítulo:

Definição de funções exponenciais

Investigação da relação entre as funções exponenciais e logarítmicas

Resolução de equações exponenciais e logarítmicas

Cálculo do crescimento e do decaimento exponencial

Conforme fico mais velho, posso sentir minha vida começando a evoluir lentamente.

Ando fazendo muitas das coisas que considerava horivelmente chatas quando era mais jovem, como preferir ouvir entrevistas no rádio do carro às estações com músicas. Talvez eu esteja errado, mas acho que todos os caras, depois de atingirem certa idade, começam a sentir a força gravitacional da velhice – começam a se transformar no velho mesquinho do qual ninguém gosta. Porções do meu cérebro que antes pensavam “Uau, aquele carro é incrível” estão mudando de forma e agora andam pensando coisas como “É melhor aquelas crianças saírem do meu gramado, ou vou jogar um sapato nelas”.

Uma das principais características de um ranzinza é a tendência de ser impaciente em relação a coisas que não importam muito (essa também é uma característica-chave das pessoas insanas, mas tentarei pensar de maneira positiva aqui). Uma coisa, acima de tudo, está começando a me deixar completamente embananado: o mau uso da palavra *literalmente*. Quantas vezes você ouviu alguém dizer “Eu estava *literalmente* morrendo de medo”? Ouço isso toda hora, o que é estranho, PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 113

22/05/2014 14:52:05



114 Parte 2: Equações e Funções Não Lineares

porque se alguém estivesse *literalmente* morrendo de medo, seria muito difícil estar conversando com essa pessoa, especialmente em uma festa.

Às vezes, as pessoas também fazem mau uso de termos matemáticos que não compreendem de fato, para deixar o conto mais bonito. Quando converso com outros pais, posso ouvir: “Minha pequena Mandy era pequenina por muito tempo, então um dia ela chegou à segunda etapa do ensino fundamental, ela *literalmente* cresceu

exponencialmente por mais ou menos três anos.” Isso seria, de fato, impressionante, mas, a menos que Mandy tenha mais de 15 metros de altura, eles não podem estar falando literalmente. É claro, o crescimento exponencial significa basicamente “crescimento rápido”, mas significa muito mais que isso. Neste capítulo, apresento a você as funções exponenciais – os primos há tanto tempo perdidos das funções logarítmicas – e direi a você exatamente o que é crescimento exponencial. Farei isso enquanto estou vestindo meias marrons na altura do joelho com minhas sandálias porque, ultimamente, tenho sentido que essa é uma boa combinação.

Representação Gráfica de

Funções Exponenciais

Uma função exponencial não é somente uma função que contém expoentes, mesmo que isso faça muito sentido. Uma *função exponencial* é uma função com uma variável, de fato, dentro do expoente. Assim, a $f(x) = 5^x$ é uma função exponencial, enquanto $h(x) = x^5$ não o é.

Para ter uma boa ideia de qual é a aparência de

Fale a Linguagem

um gráfico exponencial, esboçarei o gráfico de

As funções

uma função básica: $g(x) = 2^x$. O jeito mais fácil **exponenciais** contêm um expoente

de fazer isso é substituir um grupo de números

com uma variável dentro, como

para x , o que fiz na tabela a seguir:

$g(x) = 2^x$. A base de uma função

exponencial (neste caso, 2) é um

número positivo diferente de 1,

assim como as bases das funções

logarítmicas. Vamos nos concentrar

nas funções exponenciais que
têm números inteiros maiores que
1 na base.

Com base em alguns valores exclusivos de x e em um pouco de
aritmética simples, agora você sabe que os pontos -4 1

, 16 , -1 1 , , (0,1), (1,2) e (3,8) pertencem ao

2

gráfico da $g(x)$. Marque esses pontos, como eu fiz na Figura 9.1, para
obter um bom esboço do gráfico.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 114

22/05/2014 14:52:06

$$g(-100) = 2^{-100} = \frac{1}{2^{100}}$$



Capítulo 9: Funções Exponenciais

115

Figura 9.1

O gráfico da $g(x) = 2^x$, uma

função exponencial típica.

Como os gráficos de funções logarítmicas, todos os gráficos de funções exponenciais se parecem muito um com o outro. Não importa qual é a base da função exponencial, seu gráfico tem estas características:

Valores negativos de x resultam em números pequenos que ficam próximos ao eixo x . Um expoente negativo se traduz em um recíproco, então, um expoente negativo significa uma fração bem pequena.

Por exemplo, se $g(x) = 2^x$, então

, que é igual a

aproximadamente 0,000000000000000000000000000078, um pequeno número, de fato.

O eixo x se comporta como uma assíntota horizontal. Não importa o quanto o número que você vincula a uma função exponencial seja enormemente negativo, ou o quanto o resultado é pequeno, você

nunca obterá 0. Como um

Ponto Crítico

resultado de 0 é impossível, o

Se uma função exponencial

gráfico nunca cruzará o eixo x .

tem uma base e (número de

O gráfico contém o ponto

Euler), é chamada de **função**

(0,1). Como qualquer base

exponencial natural,

elevada na potência 0 é igual
como um logaritmo com
a 1, substituir o 0 em uma
base e é chamado de função
função exponencial sempre
logarítmica natural.
resultará em 1.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 115

22/05/2014 14:52:06

116 Parte 2: Equações e Funções Não Lineares

O gráfico nunca fica abaixo do eixo x . As saídas (valores de y) de um gráfico exponencial são sempre positivas porque você não pode elevar um número positivo a qualquer expoente e obter um resultado negativo.

O gráfico subirá de maneira inclinada e rápida depois de passar pelo eixo y . Cada unidade que é movida à direita ao longo do eixo x se traduz em um aumento vertical exponencial no eixo y . Observe a Figura 9.1 novamente.

Quando $x = 4$, o gráfico será 24 = 16 unidades acima – isso é duas vezes mais alto que o gráfico conseguiu atingir no *intervalo de x inteiro*

. Ele dobrou

de altura no espaço de uma única unidade horizontal. Quando $x = 5$, a função está a 32 unidades de altura, e só aumenta cada vez mais rápido depois disso.

Quando $x = 1$, o gráfico atinge uma altura que é equivalente à sua base.

Atribuir $x = 1$ à função realmente significa elevar a base na potência 1, que não terá seu valor alterado. Desse modo, o gráfico da função exponencial $f(x) = ax$ sempre contém o ponto $(1, a)$.

Use essas características e seu conhecimento de transformações de gráficos para esboçar rapidamente o gráfico de funções exponenciais simples.

Exemplo 1: Esboce o gráfico de $f(x) = -4x + 3 - 2$.

Solução: Comece representando graficamente a função exponencial $y = 4x$. De acordo com a lista anterior, o gráfico terá uma assíntota horizontal no eixo x , passará por $(0,1)$ e então subirá muito inclinadamente pelo ponto $(1,4)$. Desenhei o gráfico de $y = 4x$ na figura 9.2 como uma curva pontilhada.

Três transformações são aplicadas ao gráfico da $f(x)$: reflexividade sobre o eixo x (graças ao sinal negativo na frente de $4x + 3$), uma mudança horizontal três unidades à esquerda (graças ao 3 somado dentro do expoente) e uma mudança horizontal duas unidades para baixo (graças ao 2 subtraído de $4x$). O gráfico final aparece como uma curva destacada na Figura 9.2.

Você Tem Problemas

Problema 1: Esboce o gráfico da $h(x) = 3 - x + 1$.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 116

22/05/2014 14:52:06

Capítulo 9: Funções Exponenciais

117

Figura 9.2

O gráfico não transformado

de $y = 4x$ (a curva pontilhada)

se transforma no gráfico da

$f(x) = -4x + 3 - 2$ quando está

refletido horizontalmente,

deslocado 3 unidades à

esquerda e então 2 unidades

para baixo.

O Equilíbrio do Poder

Logarítmico/Exponencial

Você percebeu semelhanças estranhas entre as funções exponenciais e logarítmicas? Não é um tanto estranho que nas funções logarítmicas sua saída seja um expoente, mas nas funções exponenciais, o expoente seja a entrada? Mais estranhas ainda são suas assíntotas – funções logarítmicas têm uma assíntota ao longo do eixo y e funções exponenciais têm uma assíntota ao longo do eixo x . É

quase como se, de algum modo bizarro, cada função fosse o espelho da outra, e isso justifica uma investigação um pouco mais profunda.

A relação inquietante entre as funções logarítmicas e exponenciais que está perturbando o seu subconsciente existe porque elas são, na verdade, funções inversas. Mais especificamente, as funções logarítmicas e exponenciais com a mesma base (como , por exemplo), são inversas uma da outra. Peguei a

base 2 porque você, na verdade, já sabe uma coisa ou duas sobre as funções e

. Representei a $f(x)$ no Capítulo 8 (consulte a Figura 8.1) e a $g(x)$, algumas páginas atrás (consulte a Figura 9.1), traçando alguns pontos para cada.

Deixe-me apresentar três importantes evidências (baseado nas características das funções inversas que listei na seção “O Comportamento das Funções Inversas” no Capítulo 6), caso você ainda não esteja convencido de que essas funções são, de verdade, inversas:

PF_CG_TCIG_Pre-Calculus.indb 117

22/05/2014 14:52:07



118 Parte 2: Equações e Funções Não Lineares

Os pares coordenados da $f(x)$ e da $g(x)$ são cópias invertidas um do outro. Esses são os pontos que usei para representar no Capítulo

8: 1

, 1

, (1,0), (2,1) e (8,3). Voltando apenas algumas páginas, é

16 , - 4 2 , - 1

possível ver que os pontos que usei para representar a Figura 9.1

($g(x) = 2x$) são - 4 1

,

,

16 - 1 1

, , (0,1), (1,2) e (3,8). Os números em cada par são

2

exatamente os mesmos, mas o x e o y em cada um trocaram de lugar. Esta é a característica marcante de uma função inversa.

Os gráficos da $f(x)$ e da $g(x)$ são reflexos um do outro na linha $y = x$. Para conveniência, desenhei ambos os gráficos no mesmo plano de coordenadas na Figura 9.3.

Figura 9.3

Todas as funções

1

inversas devem ser o

2 , - 1

reflexo uma da outra

na linha $y = x$, assim

como são os gráficos

$$\text{da } f(x) = \log x \text{ e}$$

2

$$g(x) = 2x.$$

Alerta do Kelley

Embora seja importante que a $f(x)$ e a $g(x)$ tenham pares ordenados inversos e que sejam reflexos uma da outra na linha $y = x$, o requisito obrigatório das funções inversas é que tornem a equação $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ verdadeira. Contanto que se componham desse modo uma com a outra, os requisitos do gráfico e o par coordenado seguirão isso automaticamente.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 118

22/05/2014 14:52:07

Capítulo 9: Funções Exponenciais

119

Quando a $f(x)$ e a $g(x)$ estão compostas uma com a outra, tudo é cancelado, menos o x . Em outras palavras, essas funções preenchem os requisitos mais essenciais das funções inversas: $f(g(x)) = g(f(x)) = x$. A expressão faz a pergunta: “Em que potência é necessário

eleva 2 de modo que o resultado seja $2x$?”; a resposta, neste caso, é x . Você pode usar o atalho que descrevi no Capítulo 8: quando as bases logarítmicas e seu argumento são iguais, a expressão é igual ao expoente do argumento, que, neste caso, é x .

É um pouco mais difícil provar que a

também seja igual a

x . Se você estiver curioso sobre isso, verifique o quadro lateral “Como Você Fez Isso?”. Se não estiver muito curioso (e estiver com medo de sentir-se confuso), simplesmente acredite em mim – ela é igual a x .

Essas justificativas que garantem que a

e a

são inversas, se

mantêm, mesmo se a base não for 2. Contanto que as bases (a) sejam iguais, e

são funções inversas.

Como Você Fez Isso?

Para provar que

é mesmo igual a x , você deve primeiro determinar que o expoente é igual a uma variável neutra. Eu usarei

. Essa expressão pode ser

reescrita na forma exponencial:

.

Aqui está a parte legal: substitua a expressão

na equação por y (o que é permitido

desde que você tenha afirmado explicitamente que

), e veja o que acontece.

Isso prova que

. Você venceu o obstáculo final e provou que $f(x)$ e $g(x)$ são funções inversas.

Resolução de Equações

Logarítmicas e Exponenciais

Você deve estar pensando: “Está certo, ótimo, logaritmos e expoentes com a mesma base são na verdade funções inversas, e daí? Que uso prático posso fazer dessa informação?”. Estou contente que você (fez de conta que) perguntou! Aqui está a resposta: ela permite que você resolva equações que contêm expressões exponenciais e logarítmicas.



120 Parte 2: Equações e Funções Não Lineares

Você leu corretamente. Estou falando de equações aqui, não de raízes de funções, como você fez no Capítulo 7. Você vai revisar brevemente aquela terra feliz da álgebra que você conhecia e amava, a terra onde, contanto que você fizesse a mesma coisa nos dois lados de uma equação, quase tudo era permitido.

Ponto Crítico

Desta vez, em vez de só somar ou subtrair a

Lembre-se de que $\ln x$ e e^x têm a

mesma coisa de ambos os lados para mover

mesma base (e), então, quando

as coisas, ou dividir ambos os lados pela

estiverem compostas uma com a

mesma coisa para eliminar os coeficientes,

outra, cancelarão uma à outra,

você estará aplicando as funções logarítmicas deixando somente x , como e exponenciais em ambos os lados de uma acontece com e a x . Em equação. Agora que você sabe que elas são outras palavras,

funções inversas, irá explorar a relação fazendo-as cancelar uma a outra. Deixe-me mostrar a você o que quero dizer através de alguns exemplos.

Exemplo 2: Resolva as equações a seguir

a.

Solução: Esse problema é uma armadilha, pois o x que você está resolvendo está preso como um expoente. Para libertá-lo, você terá que eliminar sua base 3. Como 3^x é uma função exponencial, pode fazer isso com sua função inversa, um logaritmo com a mesma base. Então, pegue o logaritmo de ambos os lados da equação.

$$\log_3 3^x = \log_3 12$$

$$x$$

$$x$$

O lado esquerdo da equação simplifica para x (já que você tem funções inversas relacionadas uma

Alerta do Kelley

à outra).

Tente não arredondar

decimais em um problema antes de

$$x = \log 12$$

3

alcançar a resposta. Quanto antes

você arredondar e quanto menos

Essa é uma resposta final aceitável, mas se

casas decimais usar ao fazer isso, mais

quisesse expressá-la como um número decimal,

imprecisa será sua resposta.

deverá aplicar a fórmula da mudança de base:

”

,

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 120

22/05/2014 14:52:09



Capítulo 9: Funções Exponenciais

121

b.

Solução: Para resolver para x , você precisa eliminar a função logarítmica que está junto. Use as propriedades dos logaritmos do fim do Capítulo 8 para reescrever o lado esquerdo da equação como um único logaritmo: Como esse é o logaritmo comum, sua base é 10 e sua função inversa deve ser 10^x . Em um processo denominado

exponenciação, é possível tornar cada lado da equação um expoente de 10: Eu sei que parece muito

estranho, mas o único jeito de cancelar um logaritmo é torná-lo

Fale a Linguagem

uma potência de uma função

O processo da mudança

exponencial com uma base

de lados de uma equação em

equivalente, e a exponenciação é

expoentes com uma base comum

o modo como se faz isso.

é denominado **exponenciação**.

Por exemplo, a exponenciação

Agora que você tem um logaritmo

transforma a equação

comum vinculado à função

em

. Observe que a base

exponencial com base 10, eles

exponencial que é apresentada é igual

podem cancelar um ao outro,

à base do logaritmo, de modo que as

deixando somente o que está dentro:

funções inversas do lado esquerdo são

canceladas, resultando em $3x = 54$.

Multiplique ambos os lados por 2 para resolver para x : $x = 2(109) = 2.000.000.000$

c.

Isole o termo exponencial adicionando 4 em cada lado da equação: $6e^{3x} = 15$

Divida por 6 em ambos os lados para eliminar o coeficiente:

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 121

22/05/2014 14:52:10



122 Parte 2: Equações e Funções Não Lineares

Agora que você tem o termo exponencial sozinho e sem um coeficiente, pode eliminá-lo tomando o logaritmo natural de ambos os lados da equação: Divida ambos os lados por 3 para terminar:

Talvez você não goste da fração complexa lá, mas não há nada de errado com isso. Se você quisesse, poderia usar as propriedades dos logaritmos para reescrever o numerador como uma diferença dos logaritmos naturais, ou poderia obter uma resposta um pouquinho menos precisa digitando a expressão em uma calculadora para obter um equivalente decimal: ou

0,9162907319 0,305

d.

Reescreva o lado esquerdo da equação como um logaritmo natural, único usando as propriedades dos logaritmos:

$$\ln x(x - 2) = \ln 35$$

$$\ln (x^2 - 2x) = \ln 35$$

Eleve ambos os lados da equação nas potências usando e , já que é a base do logaritmo natural:

Você fica com uma expressão quadrática simples que pode ser resolvida pelo método de fatoração:

$$x^2 - 2x - 35 = 0$$

Alerta do Kelley

$$(x - 7)(x + 5) = 0$$

A etapa final ao

$$x = 7 \text{ ou } x = -5$$

resolver qualquer equação

logarítmica deve ser a de certificar—

Opa, espere um minuto. Se você substituir

-se de que as soluções são válidas.

$x = -5$ de volta na equação original para

Lembre-se de que os logaritmos não

verificá-la, obterá isto:

podem ter argumentos negativos.

$$\ln (-5) + \ln (-7) = \ln 35$$

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 122

22/05/2014 14:52:11

Capítulo 9: Funções Exponenciais

Infelizmente, os argumentos das funções logarítmicas não podem ser negativos, então, essa solução deve ser descartada. A única resposta para esse problema é $x = 7$.

Você Tem Problemas

Problema 2: Resolva as equações:

a. $\log x - \log 3 = 8$

2

2

b. $8x^{-1} = 5$

Crescimento e Decaimento Exponencial

No mundo real, somente poucas coisas experimentam verdadeiramente o crescimento exponencial, pelo menos durante um período prolongado de tempo.

A razão disso é simples: o crescimento exponencial normalmente resulta em números realmente grandes e irrealistas, que esticam os limites da realidade. Por exemplo, se a população de ursos cinzentos em uma determinada área crescer exponencialmente, os ursos cinzentos acabarão por invadir a cidade. Se você estava acostumado a ver antes somente um ou dois ursos por mês, de repente começa a vê-los “jorrando” pela cidade, como a correnteza de um rio peludo. Até mesmo o simpático proprietário da sorveteria desapareceu, e o urso cinza que se tornou dono do local tem em seus olhos enormes um olhar que diz: “Não se atreva a perguntar o que houve com o Sr. Mendelson, você não quer saber.”

Por fim, os ursos acabarão com os proprietários de mercados, quitandas e sorveterias. Uma cidade pequena não consegue suportar meio milhão de ursos famintos que não entendem as complexidades de uma economia de mercado. Pior que isso, as condições sanitárias da cidade decairão rapidamente, sem dúvida, graças àquilo que os ursos só faziam no mato, aquele local clichê.

Para evitar essas situações irrealistas, os professores de matemática e os livros-textos tendem a ficar restritos aos três tipos principais de problemas de crescimento e decaimento exponencial:

Juros compostos continuamente (como se você recebesse um valor

em uma conta bancária, o qual, infelizmente, *não* crescerá a uma taxa fora de controle).

Crescimento de bactérias (as colônias de bactérias são tão pequenas que milhões e milhões podem crescer em uma única placa de Petri sem ficarem limitadas pelos recursos disponíveis).

Problemas de *meia-vida* (o *decaimento* exponencial envolve quantidades que diminuem, não aumentam).

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 123

22/05/2014 14:52:12



124 Parte 2: Equações e Funções Não Lineares

A fórmula de todos os problemas de crescimento e decaimento exponencial é esta:

Fale a Linguagem

A **meia-vida** de um

elemento radioativo é a duração de

tempo que a massa desse elemento

Aqui está o que essas variáveis representam:

leva para diminuir pela metade. Por

a quantidade com a qual você inicia (N), a

exemplo, se você compra 300 gramas

quantidade com a qual você termina (F), a taxa

de um elemento cuja meia-vida seja

a qual a quantidade muda (k) e a quantidade de

de dois anos, você terá somente 150

tempo que passou (t). O e na fórmula não é uma gramas dele exatamente dois anos

variável. É seu velho amigo número de Euler.

depois da data em que adquiriu o

Então, o crescimento exponencial é, de fato,

produto. Depois de mais dois anos,

somente uma função exponencial natural.

você terá 75 gramas.

Alerta do Kelley

Exceto em problemas de juros, você não saberá o que é o k imediatamente. De fato, sua primeira tarefa será calcular o k com base em uma dada informação, como no Exemplo 4. Em problemas relacionados a juros, contudo, o k será a taxa de juros expressa na forma decimal. Por exemplo, se uma conta tem 2,5%

de taxa de juros, então $k = 0,025$. Mova o decimal duas casas à esquerda e deixe o sinal de porcentagem para obter k .

Exemplo 3 (*de um folheto bancário*): Obrigado por abrir uma nova poupança no banco Ebenezzer, onde nosso lema é “Você não terá mais carvão hoje, Cratchit!”.¹

Você escolheu nosso terceiro tipo de conta, “Economia para o Natal Futuro”, que é composta a uma taxa contínua de 0,9% e vem com uma lápide assustadora de graça com seu nome nela. “Talvez você considere essa taxa de juros baixa, Tim, mas um investimento inicial de R\$4.000,00 que não é tocado durante 20 anos renderá um retorno de R\$...” (O resto do folheto é ilegível. Qual número deve aparecer no fim dessa frase?) **Solução:** Você deverá aplicar a fórmula $F = Ne^{kt}$, porque os juros são continuamente compostos. Defina que $N = 4.000$ (é o investimento inicial, também chamado de

“principal”), $k = 0,009$ (taxa de juros expressa na forma de decimal) e $t = 20$ (o número de anos em que o dinheiro ficou investido). Você não sabe qual é o valor de F . É isso que o problema pede para você resolver: $F = 4.000 e 0,009(20)$

$$F = 4.000 e 0,18$$

1 N.E.: referência ao famoso *Conto de Natal*, de Charles Dickens.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 124

22/05/2014 14:52:12



Digite isso em sua calculadora e obtenha uma resposta. Você deverá arredondar sua resposta final em duas casas decimais, já que está lidando com dinheiro: $F =$

R\$4.788,87. Você ganha menos de R\$ 800,00 de juros em 20 anos. É melhor investir em outra coisa.

Exemplo 4: Depois que sua mãe

passou pela fase do tricô e do crochê,

Alerta do Kelley

apareceu com um *hobby* bem estranho:

Mantenha suas

coleccionar isótopos radioativos. Ela

unidades de tempo consistentes. Se

nunca tinha parecido estar tão feliz

você calcular k medindo t em horas,

antes disso, mas também nunca

continue a medir t em horas até o

havia sido observada tão de perto

resto do problema.

pela Polícia Federal. Se você comprar

para ela 1.000 gramas do isótopo

que ela *tanto* quer, quanto restará no

aniversário dela, que é daqui a 30 dias,

se a meia-vida do isótopo é de 8 dias?

Solução:

Esse não é um problema de juros,

Ponto Crítico

então k não é um simples número

Se o k da fórmula $F = Ne^{kt}$

tirado do ar (mesmo que você tenha

for negativo, o problema envolve

ficado tentado a pensar que é,

decaimento exponencial.

). Para determinar o valor de k ,

Ainda assim, se k for positivo,

você está calculando o

faça de conta que o período da meia-

crescimento exponencial.

vida (neste caso, 8 dias) passou. Se

você começou com 1.000 gramas,

terá 500 (exatamente metade) em 8

dias, então $N = 1.000$, $F = 500$ e $t = 8$.

$$F = Ne^{kt}$$

$$500 = 1.000 e^{k(8)}$$

Resolva para k . Comece dividindo ambos os lados da equação por 1.000.

Aham, há um 1 no problema, afinal de contas, embora não seja k .

2

0,086643397569993

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 125

22/05/2014 14:52:13

126 Parte 2: Equações e Funções Não Lineares Observe que incluí várias casas decimais de k para que a resposta final seja a mais precisa possível. Neste ponto, você sabe que o elemento perigoso da mamãe irá decair de acordo com esta equação: $F = 1000e^{-0,086643397569993(t)}$. Para descobrir quanto irá sobrar após a data de aquisição, substitua t por 30: ,

,

,

gramas

Você Tem Problemas

Problema 3: Um cientista nota que há aproximadamente nove colônias de bactérias em uma placa de Petri às 8 horas, na segunda-feira. Na terça-feira, às 16 horas, esse número cresceu para 113 colônias. Supondo que o crescimento é exponencial, quantas colônias estarão presentes na 6ª feira às 17 horas, quando o cientista for para casa para festejar como somente os cientistas sabem fazer? (Dica: Meça t em horas.) **O Mínimo que Você Precisa Saber**

As funções exponenciais têm variáveis dentro de seus expoentes.

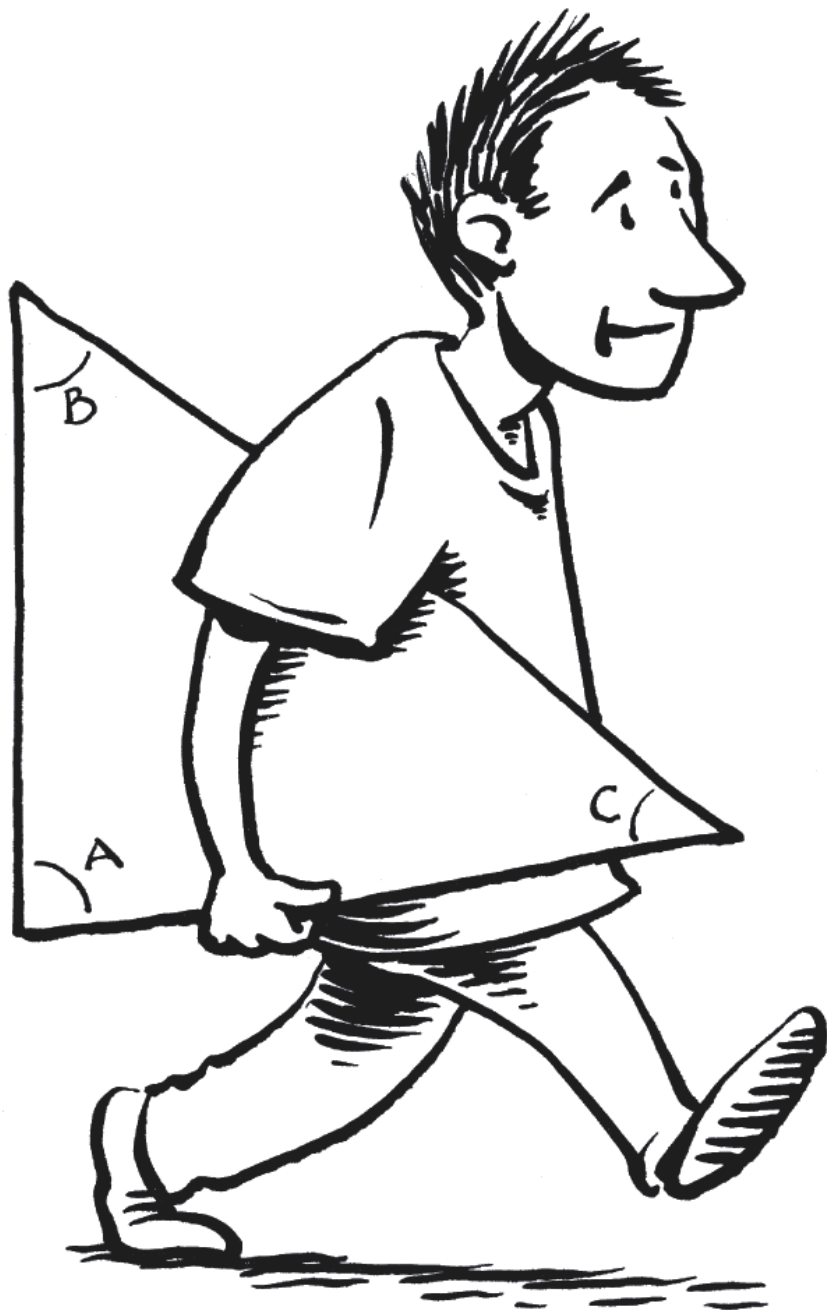
As funções exponenciais e logarítmicas com a mesma base são funções inversas uma da outra.

As expressões $\log ax$,

, $\ln ex$ e $e \ln x$ são todas iguais a x .

a

A fórmula do crescimento e decaimento exponencial é $F = Ne^{kt}$. Se k for negativo, o problema envolve *decaimento* exponencial; contudo, se k for positivo, você está calculando o *crescimento* exponencial.



Parte 3 Trigonometria

Nesta parte, você revisitará brevemente a terra feliz da geometria e passeará entre seus habitantes curvos e angulares mais uma vez. Especificamente falando, você focará em uma forma geométrica: o

triângulo. De fato, a medida dos triângulos é tão importante que tem seu próprio nome especial: trigonometria. Mesmo que você tenha lidado com triângulos antes, a trigonometria tem um gosto muito particular, uma mistura apimentada com sabores distintos, que você será capaz de provar, incluindo sabores familiares (como equações e triângulos retângulos) e sabores novos e surpreendentemente vigorosos (como o círculo unitário e as identidades trigonométricas). Nos cinco capítulos a seguir, você vai experimentar um buffet de trigonometria (ou “trig”, para os íntimos), que pretende saciar sua fome, não apenas para a aula de pré-cálculo, mas também para qualquer curso de cálculo que possa surgir em seu futuro.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 127

22/05/2014 14:52:14

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 128

22/05/2014 14:52:14

Capítulo10

Sendo Dobrado

pelos Ângulos

Neste Capítulo:

Representação gráfica de ângulos na posição padrão

Medida dos ângulos em radianos e graus

Geração de ângulos congruos

Apresentação do seno, cosseno e da tangente

Cálculo de valores trigonométricos com e sem calculadora

Quando decidi virar professor de matemática do ensino médio, sabia que muita gente não gostava de matemática; e isso não era nenhuma novidade. A maioria das pessoas encara a matemática como algo ruim, mas necessário, como a vacinação – dolorida, mas supostamente útil. Infelizmente, inoculações de vacinas têm uma vantagem que a matemática não tem: você sabe por que são úteis. Ninguém jamais pergunta “Quando precisarei dessa vacina contra rubéola na vida real?”, porque a resposta é simples: caso você tenha contato com alguém que tem rubéola.

É claro, quando meus alunos do ensino médio me perguntaram “Por que tenho que aprender os ângulos no círculo unitário?”, eu poderia ter respondido “Porque, de outro modo, você provavelmente morrerá!”, mas acho que eles não acreditariam em mim. Quando você chega no pré-cálculo, fica mais difícil convencê-los de que o que eles estão aprendendo vale a pena. Como resultado, quando os alunos perguntam aos professores por que eles têm que aprender um tópico específico de pré-cálculo, PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 129

22/05/2014 14:52:14

130 Parte 3: Trigonometria

a maioria dos professores usa um destes argumentos: (1) porque é bom para você; (2) porque eu disse para aprender; ou (3) se você não parar de fazer essa pergunta, vou triplicar sua lição de casa e jogar meu livro-texto do professor, de 17.000

páginas, na sua cabeça.

O que eu não sabia era que muitos de meus companheiros, professores de outras matérias (não de matemática), eram, de fato, bem bons em matemática quando eram estudantes. Muitos deles eram excelentes na matemática do ensino fundamental e gostavam de álgebra, mas começaram a ficar ressentidos com a matemática quando entraram em contato com a geometria e a trigonometria.

Isso ocorre provavelmente porque ambos os conteúdos requerem uma habilidade mental um tanto diferente. Há alguns conceitos bizarros (como provas) e algumas definições que você não entende na primeira vez que lê (como radiano e cosseno).

Para ter êxito, você não pode simplesmente memorizar as etapas do problema, como podia fazer em grande parte da álgebra, e se ninguém explicar esses conceitos estranhos para você, logo se perderá.

Neste capítulo, dou-lhe uma boa base sobre a qual poderá construir um conhecimento sólido de trigonometria. Garantirei que compreenda o que está acontecendo conforme seguirmos adiante, para que você não vire estatística e acabe odiando matemática só porque ela começou a ficar um pouco diferente. É claro que as coisas podem ficar um pouco estranhas no começo, mas isso é normal, pois quanto mais perto chegamos do cálculo, mais estranhos (e interessantes) se tornam os tópicos.

Ângulos no Plano Cartesiano

Na geometria, você aprendeu que um *ângulo* é feito de dois raios (chamados de *lado inicial* e *lado final*) que compartilham o mesmo ponto final (denominado *vértice*) como duas estradas retas que partem de uma mesma intersecção e continuam infinitamente em linha reta. Embora já tenha feito a sua parte de cálculos em geometria, as medidas verdadeiras dos ângulos frequentemente não importavam.

Você podia provar que os triângulos eram congruentes sem, de fato, ter que tirar do bolso um transferidor para medir suas partes.

Em trigonometria, você perderá muito tempo calculando as medidas de ângulos, então, na maioria das vezes, os ângulos são desenhados no plano cartesiano (que torna a medição muito mais fácil). Por questões de consistência, você deve desenhar os ângulos na *posição padrão*, o que significa...

1. O vértice fica na origem.
2. O lado inicial fica na parte positiva (direita) do eixo x .
3. Um ângulo positivo se desloca no sentido anti-horário, do lado inicial para o lado final, um ângulo negativo se desloca no sentido horário.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 130

22/05/2014 14:52:14



Fale a Linguagem

Um **ângulo** é criado ao unir dois raios (denominados **lado inicial** e **lado final** do ângulo, embora não seja realmente importante saber qual é qual) em seus pontos finais, criando um ponto final comum denominado **vértice**. Um ângulo na **posição padrão** é indicado no plano cartesiano, de modo que o vértice fique na origem e o lado inicial se sobreponha no eixo x . Se o lado final também ficar em um eixo com um ângulo de 90° , 180° ou 270° , é descrito como **quadrante**.

A Figura 10.1 mostra o ângulo $\angle ABC$ representado na posição padrão. Observe que o vértice, B , está localizado em $(0,0)$ e um de seus lados, , fica no *eixo x* positivo.

Qual é a medida aproximada de $\angle ABC$ em graus? Isso depende de qual lado você vai (no sentido horário ou anti-horário) desde o lado inicial – você poderia dizer

$\angle ABC \approx 315^\circ$ ou $\angle ABC \approx -45^\circ$; ambas são boas aproximações.

Talvez esteja pensando: “Espere um minuto! Eu achava que os ângulos

Como Você Fez Isso?

só tinham uma medida! Como um

Você já se perguntou por que os ângulo pode ser positivo e negativo?”.

quadrantes do plano cartesiano são

Tecnicamente, você está certo, um numerados de modo tão estranho?

ângulo é um só. No entanto, você precisa

O modelo segue o caminho de

raciocinar um minuto. Não estamos

um ângulo na posição padrão,
realmente interessados no ângulo agora,
começando com o quadrante
somente em seu lado final, e vários
superior direito do plano cartesiano
ângulos terão o mesmo lado final como
e girando no sentido anti-horário
. Você saberá mais sobre isso depois,
desde lá.

neste capítulo, quando trataremos de
coisas chamadas ângulos côngruos.

Figura 10.1

*$\angle ABC$ é desenhado na
posição padrão porque seu
vértice está na origem e um
de seus lados se sobrepõe ao
eixo x positivo.*

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 131

22/05/2014 14:52:15





132 Parte 3: Trigonometria

Medição de Ângulos

Há muitas unidades para ajudá-lo a descrever a medida de um ângulo, mas é provável que você esteja mais acostumado com o *grau*. Um grau é simplesmente $1/360$

de um círculo e, embora esta seja uma definição

um tanto simplória, os graus são parte inegável

Fale a Linguagem

do dialeto humano. As enterradas no basquete

Um **grau**, unidade de

que fazem o jogador girar uma vez no ar são

medição de ângulos, é equivalente a

chamadas de “360”; mudanças no jeito de

$1/360$ de um círculo pois este possui

abordar as coisas no mundo dos negócios são

360° . Ângulos com menos de 90° são

consideradas como “mudanças de 180 graus”

descritos como **agudos**. Ângulos com

(colocar a cabeça no sentido oposto). Meu

mais de 90° , mas menos de 180° são

amigo Rob estava dirigindo em uma estrada denominados **obtusos**. Se um ângulo traiçoeira do sul, em um inverno desses, e seu mede exatamente 90° , é denominado carro girou completamente, quase resultando **ângulo reto**; um ângulo de 180° é em uma batida de frente, um incidente que ele denominado **ângulo raso**.

costuma mencionar: “Você só pode dizer que está vivo depois de ter dado um 360 na frente de um caminhão e ter sobrevivido para contar a história.”

Graus e Radianos

Por mais confortável que você se sinta com os graus, preciso fazer seu mundo ruir um pouco (talvez você prefira se sentar para ouvir a má notícia). Os estudantes modernos de cálculo normalmente medem os ângulos usando unidades denominadas *radianos* e, como o pré-cálculo é a ladeira acima que dá acesso ao cálculo, isso significa que você também terá de medi-los assim. A boa notícia é que os ângulos medidos em radianos não são escritos como decimais longos e difíceis de lidar

(como costuma ocorrer com os graus), mas a má

Ponto Crítico

notícia é que isso ocorre porque os radianos são

Em geometria, você nomeava

escritos normalmente na forma de fração.

a maioria dos ângulos usando

uma ou três letras (como $\angle E$ ou

Para piorar a situação (só por um momento, eu $\angle DEF$), mas em pré-cálculo as prometo, então as nuvens desaparecerão e tudo letras gregas são normalmente ficará claro e alegre novamente), os radianos usadas para representar não são tão intuitivos quanto os graus. Você ângulos. As mais comuns são θ (teta, nunca ouvirá um skatista dizendo “Dei um pronunciada como “TÉ-ta”), α (alfa, wicked air e um giro de 4π radianos”, pois um pronunciada “AL-fa”) e β , (beta, “720” é fácil de interpretar como duas rotações. pronunciada “BÉ-ta”). Ainda assim, é importante saber o que diabos é um radiano.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 132

22/05/2014 14:52:16



Capítulo 10: Sendo Dobrado pelos Ângulos

133

Dê uma olhada no círculo na Figura 10.2. Está centralizado na origem

– e destaquei um raio do círculo, o segmento que conecta a origem ao círculo no primeiro quadrante. Eu poderia ter desenhado o raio em qualquer local do círculo, mas escolhi esse porque, se você pensar neste raio como o lado final de um ângulo na posição padrão (o ângulo θ na Figura 10.2), ele tem o mesmo comprimento do arco do círculo que ele cruza. Em outras palavras, o raio (mesmo que seja reto) tem a mesma medida do arco destacado (mesmo que seja curvo), e isso significa que o ângulo θ mede exatamente 1 radiano.

Figura 10.2

Quando o ângulo θ cruza

o círculo, se obtém o arco

destacado, que tem o mesmo

comprimento do raio do

círculo. Por isso, θ mede

exatamente 1 radiano.

Percebe a conexão –

raio e radiano?

Como você provavelmente pode dizer simplesmente olhando a Figura 10.2, os radianos são muito maiores que os graus. De fato, 1 radiano mede aproximadamente $57,296^\circ$, então há um pouco mais de 6

radianos em um círculo, em oposição a

360° . De fato (e esta é a parte legal), há

exatamente 2π radianos em um círculo.

Fale a Linguagem

Assim, 360° e 2π radianos são dois modos

de medir a mesma coisa, como 0°C e 32°F

Um ângulo que une

medem a mesma coisa (o ponto de

as extremidades (ou “subtende”, se congelamento da água, e a temperatura estende por baixo) de um arco de um exata em que você percebe que sua mãe círculo cujo comprimento é igual ao estava certa todos aqueles anos – você raio desse círculo (como na Figura 10.2) mede exatamente 1 radiano, suas orelhas estão tão geladas que aproximadamente $57, 296^\circ$. parece que vão quebrar).

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 133

22/05/2014 14:52:17





134 Parte 3: Trigonometria

Conversão entre Graus e Radianos

Até você se acostumar com os radianos, provavelmente precisará ficar fazendo conversões entre eles e os graus com frequência. Felizmente, a fórmula de conversão é realmente fácil, tudo que precisa ser feito é multiplicar a medida do ângulo por (para converter de graus para

Ponto Crítico

radianos) ou

(para converter de radianos

Aqui está um jeito de lembrar

quando multiplicar por

e

para graus). Conforme avançar no livro, você

verá menos ângulos em graus e mais em

quando é necessário usar

:

radianos, então force a si mesmo a fazer a

conversão (como π e 180° equivalem ao mesmo

as unidades para as quais você

ângulo, é a mesma coisa que multiplicar por 1, a

deseja converter devem estar na
identidade multiplicativa).

parte superior da fração. Veja que,
no Exemplo 1(a), você está tentando

Exemplo 1: Converta as medidas dos ângulos
converter para radianos, então π , e
conforme indicado:

não 180, deverá estar no numerador.

a. Expresse 135° em radianos.

Solução: Multiplique 135 por
e deixe

o resultado na forma de fração:

Alerta do Kelley

Enquanto os graus

têm um modo próprio de serem
denotados ($^\circ$), os radianos não têm.

Você pode simplificar essa fração (divida

Você poderia escrever simplesmente
o numerador e o denominador por 45).

“radianos” ao lado da resposta, mas

Você obterá uma resposta final de .

se a medida do ângulo contém um

b. Expresse

em graus.

π e não contém nenhum símbolo

de grau junto, é seguro supor que o

Desta vez, você multiplica por

. Não

ângulo esteja em radianos.

faça nada de outra maneira, mesmo que o

ângulo seja negativo.

Simplifique a fração ou a reescreva como um número decimal para obter a resposta final de 315

—

° ou -

.

2

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 134

22/05/2014 14:52:18



Capítulo 10: Sendo Dobrado pelos Ângulos

135

Você Tem Problemas

Problema 1: Converta as medidas dos ângulos conforme indicado: a. Expresse -150° em radianos.

b. Expresse radianos em graus.

c. Expresse 5 radianos em graus.

Ângulos Côngruos

A característica mais importante de um ângulo desenhado na posição padrão é seu lado final. Afinal de contas, todos os ângulos do mundo têm o mesmo vértice e lado inicial se estiverem na posição padrão, então, eles não são muito interessantes. Esse lado final é tão importante, de fato, que quaisquer dois ângulos que têm o mesmo lado final recebem uma classificação especial, são conhecidos como *ângulos côngruos*.

Só por 1 minuto, retornarei a um exemplo que apresentei perto do início

Fale a Linguagem

deste capítulo, um ângulo medindo 315°

Ângulos côngruos

desenhado na posição padrão, cujo lado têm o mesmo lado final quando final está indicado na Figura 10.3. desenhados na posição padrão.

Figura 10.3

Os ângulos 315° , 675° e -45° , quando desenhados na posição padrão, têm o mesmo lado final; então, são ângulos côngruos.



136 Parte 3: Trigonometria

O lado final é destacado por uma razão. Já mencionei que você poderia ir 45° no sentido negativo (horário), e que terminaria com o mesmo raio, mas esses não são os dois únicos ângulos que compartilham o raio final. Se você *fosse até a origem e então fosse até 315°* ? O ângulo mediria $360^\circ + 315^\circ = 675^\circ$ (uma volta inteira no círculo mais 315°).

Pense no jogo “Roda da Fortuna”. Uma pessoa normal poderia provavelmente girar a roda em uma rotação completa, 360° ou 2π radianos. Talvez o Super-

-Homem pudesse girar a roda de modo a completar 500 rotações ($500 \cdot 360^\circ =$

180.000° ou $2\pi \cdot 500 = 1000\pi$ radianos). De qualquer modo, ambos os jogadores (super e não super) acabariam no mesmo lugar, assim como ocorreu com os ângulos congruos 315° , -45° e 675° .

Desse modo, a única coisa que você precisa fazer para calcular os ângulos congruos é adicionar múltiplos de 360° ou 2π radianos. O tamanho dos ângulos (e o tempo que leva para que o giro ridículo do Super-homem finalmente chegue ao fim) pode mudar, mas o resultado final continua inalterado.

Exemplo 2: Calcule os dois ângulos congruos positivos e dois negativos de cada um dos valores a seguir:

a. 210°

Solução: Some 360° para obter um ângulo congruo de 570° e some mais 360°

para outro ângulo congruo de 930° . Subtraia 360° do ângulo original de 210° e um ângulo congruo negativo do resultado: $210^\circ - 360^\circ = -$

150° . Subtraia mais 360° para outro ângulo côngruo negativo de -510° .

Ponto Crítico

Alguns livros-texto gostam que você escreva *todos* os ângulos côngruos possíveis de um dado ângulo e, mesmo que haja um número infinito, é possível fazer isso.

Todos os ângulos que são côngruos a radianos vêm da fórmula

, onde

k é um número inteiro. Esse é somente um jeito bonito de dizer que mais ou menos todos os múltiplos de 2π resulta em um ângulo côngruo. Isso faz sentido porque somar e subtrair 2π sempre é o modo exato como calculamos os ângulos côngruos.

Para calcular todos os ângulos côngruos possíveis de um ângulo medido em graus, use o mesmo raciocínio, mas mude 2π para 360° . Por exemplo, os ângulos côngruos a 45°

são $45^\circ + 360k$, onde k é, mais uma vez, um número inteiro.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 136

22/05/2014 14:52:19



Capítulo 10: Sendo Dobrado pelos Ângulos

137

b.

radianos

Solução: Some 2π duas vezes para obter seus ângulos côngruos

positivos.

Você precisará usar os denominadores comuns. Então, embora esteja somando 2π , parecerá que você está somando

:

e

Para obter os ângulos congruos negativos, você precisa, de fato, subtrair 2π

de

três vezes (na primeira vez em que fizer isso, obterá outro ângulo positivo, , que é, na verdade, um terceiro ângulo congruo positivo). Subtrair 2π duas vezes mais resulta em

e

.

Você Tem Problemas

Problema 2: Calcule um ângulo congruo negativo e um ângulo congruo positivo para cada medida:

a. -900°

b. radianos

Trigonometria de Triângulos Retângulos

Vamos falar sobre triângulos

retângulos por um momento. Claro

Ponto Crítico

que quando me refiro a “triângulos

Os estudantes normalmente

retângulos” estou falando de

usam a palavra “SOH-CAH—

triângulos que contém ângulos retos,

TOA” para lembrar quais
não estou falando de triângulos
lados vão com quais razões.
corretos, que sempre votam de
(As letras são uma forma
maneira conservadora na Convenção
reduzida de “Seno é igual
Nacional do Partido Republicano
ao Oposto sobre a Hipotenusa,
(aqueles são triângulos de direita, o
Cosseno é igual ao Adjacente sobre
que é inteiramente diferente). Você
a Hipotenusa e Tangente é igual ao
sabia que os ângulos em um triângulo
Oposto sobre o Adjacente.”) Prefiro
retângulo estão relacionados aos
a expressão mnemônica mais bizarra
comprimentos de seus lados?
que eu mesmo criei: “**S**apos **O**u
Hipopótamos **C**antam **A**qui **H**oje;
Três funções governam a relação
Tatus **O**lham **A**ssustados”.
das peças de um triângulo
retângulo: seno, cosseno e tangente

22/05/2014 14:52:22



138 Parte 3: Trigonometria

(normalmente abreviados como $\sin$, $\cos$ e $\tan$ nos problemas). Eles funcionam assim: você produz um ângulo dentro de uma das três funções e o resultado é igual a uma fração, o que é um pouco diferente para cada uma das funções.

lado oposto

lado adjacente

$\sin \theta$

$\cos \theta$

$\tan \theta$

lado oposto

hipotenusa

hipotenusa

lado adjacente

Deixe-me explicar o que significam os termos nessas razões. Na Figura 10.4, desenhei duas cópias de um triângulo retângulo ABC ; a única coisa diferente a respeito dos dois triângulos é o ângulo agudo, no qual estou tentando focar no momento (rotulado como θ).

Figura 10.4

Embora esses

triângulos sejam

exatamente o mesmo,

cada versão foca em

um dos dois ângulos

a

agudos. Observe

a

que as designações

“adjacente”, e “oposto”

variam dependendo

hipotenusa

oposto

hipotenusa

adjacente

do ângulo agudo

envolvido, mas a

hipotenusa é

sempre a mesma.

adjacente

oposto

Ambos os triângulos retângulos têm um lado distinto que é o mais longo AC , denominado *hipotenusa*. Ela é o lado oposto ao ângulo reto ($\angle B$) e age como um lado de cada ângulo agudo. O segmento diferente da hipotenusa e que completa o ângulo agudo é denominado *lado adjacente*. No triângulo à direita na Figura 10.4, $\angle C$ é o

ângulo agudo no qual estou interessado.

Fale a Linguagem

Observe que $\angle C$ é feito de dois segmentos:

Cada ângulo agudo

AC (a hipotenusa) e BC (que completa o
em um triângulo retângulo tem dois
ângulo e, assim, é o lado adjacente). O lado que
lados distintos: o **lado adjacente** e a
resta do triângulo retângulo, AB , é
hipotenusa (que é o maior dos dois).

denominado *lado oposto*. No triângulo à

O lado de um triângulo retângulo
esquerda na Figura 10.4, o lado adjacente e o
que não forma o ângulo agudo em
oposto trocam de lugar conforme você se
questão é denominado **lado oposto**.

concentra no outro ângulo agudo.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 138

22/05/2014 14:52:23



Capítulo 10: Sendo Dobrado pelos Ângulos

Para descobrir o seno, o cosseno ou a tangente de um ângulo agudo em um triângulo retângulo, tudo o que você

Alerta do Kelley

precisa saber é qual lado é qual, e então

Quando usar sua

substituir seus comprimentos dentro

calculadora para avaliar razões

da razão apropriada. Você usará sua

trigonométricas, isso precisa ser feito

calculadora para avaliar quase todas as

no modo correto (graus ou radianos),

funções trigonométricas, com exceção

com base no modo como o ângulo

de uma pequena porção que pertence

é medido. Por exemplo, $\sin 45^\circ \approx$

a algo denominado “círculo unitário”;

0,707106781, se sua calculadora

descreverei isso no final do capítulo.

estiver definida corretamente no modo

de graus; mas se você estiver no modo

Exemplo 3: Calcule o comprimento

de radianos, obtém um valor incorreto

de x na Figura 10.5 e circule sua resposta

de 0,85090352.

até o milésimo.

Figura 10.5

Para descobrir o valor de

x, você primeiro precisa

descobrir qual razão

trigonométrica usar.

O lado com comprimento 11 é oposto ao ângulo reto no diagrama, então essa deve ser a hipotenusa; também é um lado do ângulo de 55° . O outro lado do ângulo (o lado adjacente) é o valor para o qual você está tentando resolver x . Então, você sabe o comprimento da hipotenusa e está tentando descobrir o comprimento do lado adjacente. Qual razão trigonométrica governa a relação entre a hipotenusa e os lados adjacentes? O cosseno. Então, substitua o ângulo de 55° e os lados que correspondem a ele.

adjacente

$\cos\theta$ hipotenusa

$\cos 55^\circ \times 11$

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 139

22/05/2014 14:52:24



140 Parte 3: Trigonometria

Multiplique ambos os lados da equação por 11 para resolver para x . Como o problema pede que a resposta seja expressa na forma de decimal, digite o $\cos 55$ em sua calculadora, garantindo que esteja definida no modo de graus, e você descobrirá que o $\cos 55^\circ \approx 0,573576436$.

$$x = 11(\cos 55^\circ)$$

$$x \approx 6,309$$

Você Tem Problemas

Problema 3: Calcule x na Figura 10.6 e arredonde sua resposta para o milésimo.

Figura 10.6

Há algo melhor do que

resolver para x ?

Que barato!

O Círculo Unitário

As três funções trigonométricas que aprendeu até agora (seno, cosseno e tangente) são ainda mais úteis do que eu talvez o tenha levado a crer. Talvez, você ache que elas funcionam somente com ângulos agudos de triângulos retângulos, mas isso não é verdade. De fato, cada triângulo no universo tem um valor de seno e cosseno, e quase todos os

Fale a Linguagem

ângulos têm também uma tangente. Ainda assim,

O **círculo unitário**,

para fazer o melhor uso deles, é necessário deixá-

embora seja somente um círculo

na posição padrão no plano cartesiano.

centralizado na origem com um raio

Na Figura 10.7, desenhei algo chamado de *círculo*

de 1, é uma ferramenta para gerar

unitário. Embora a origem do nome seja simples,

os valores do seno e do cosseno dos

é um círculo centralizado na origem da qual o
ângulos mais comuns encontrados
raio é de 1 unidade. (Não importa se a “unidade”
no pré-cálculo. Se um ângulo θ for
em questão é em centímetros, polegadas, pés,
desenhado na posição padrão, ele
milhas, quilômetros, anos-luz, espigas de milho,
cruzar o círculo unitário em um ponto
unhas ou tiras de bacon – caso esteja cuidando a
(a, b), onde $a = \cos \theta$ e $b = \sin \theta$.
quantidade que absorve de carboidratos.)

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 140

22/05/2014 14:52:24



Capítulo 10: Sendo Dobrado pelos Ângulos

141

Figura 10.7

*Os valores de x e y do
ponto onde o lado final
de um ângulo atinge o*

círculo unitário dão os

valores do seno e do cosseno

desse ângulo.

Além do círculo, a Figura 10.7 apresenta uma enorme pilha de ângulos desenhados na posição padrão: 0 (0°), (30°) , (45°) , (60°) , (90°) , e assim por diante, até você voltar ao eixo x positivo depois de uma revolução completa no sentido anti-

-horário e de terminar em 2π (360°). Acredite ou não, os pares coordenados que marcam a intersecção de cada lado final de cada ângulo e o círculo unitário são incrivelmente importantes, então, inclui esses pontos também. Esses pontos são tão essenciais porque seus valores de x são os cossenos dos ângulos que se cruzam lá, e seus valores de y são os senos. Por exemplo, o ângulo cruza o círculo unitário no ponto (31)

$(2, -2)$, então você sabe

automaticamente o

e o

Ponto Crítico

Na verdade, você saberá

sen

. Em outras palavras,

muito mais do que 17 ângulos

tudo o que você precisa fazer para

quando memorizar o círculo

lembrar instantaneamente os

unitário. Embora cubra ângulos

valores do cosseno e do seno de 17

somente entre 0 e 2π , os

ângulos importantes é memorizar

ângulos congruos terão valores

essa insignificante ilustração do

trigonométricos iguais. Então, você, de

círculo unitário (ou fazer uma

fato, está memorizando informações

tatuagem em seu braço, o que é não

para um número infinito de ângulos.

apenas mais permanente, mas

também mais dolorido).

PF.CG.TCIG_Pre_Calculus.indb 141

22/05/2014 14:52:26

142 Parte 3: Trigonometria

Claro, a Figura 10.7 intimida um pouco no início, mas guardá-la em seu cérebro definitivamente vale a pena. A maioria dos professores de cálculo irá requerer que você saiba instantaneamente os valores do cosseno e do seno de cada ângulo do círculo unitário, então reserve um tempo agora para memorizá-los. Encontrar padrões também pode ajudar:

Frações com os mesmos denominadores sempre têm os mesmos cossenos e senos; só são diferentes pelo sinal.

Como Você Fez Isso?

Você pode descobrir os pontos de interseção no círculo unitário por si mesmo, se realmente quiser. Você só precisa lembrar as relações de $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ e $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$

do triângulo retângulo que aprendeu em geometria. Como exemplo, mostrarei como gerar o ponto $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$

,)

$\left(\left| \begin{smallmatrix} 2 & 2 \end{smallmatrix} \right| \right)$, onde o ângulo atinge o círculo unitário.

Para começar, redesenharei o ângulo na posição padrão, indicando os pontos para uma referência mais fácil e conectando a extremidade do lado final (B) ao eixo x , onde vai encontrar o ponto C (veja a Figura 10.8). Isso cria um triângulo retângulo ABC , cuja hipotenusa, AB , tem comprimento 1 porque também é um raio do círculo unitário. Você também sabe que $\angle B = 60^\circ$, já que todos os ângulos de um triângulo devem somar 180° e os outros dois ângulos somam $120^\circ = 30^\circ + 90^\circ$.

Figura 10.8

O ângulo é igual

a 30° , e reescrevê-lo

desse modo pode

ajudar a despertar

suas memórias

obscuras e profundas

dos triângulos

de 30° , 60° e 90°

da geometria.

De acordo com o teorema de $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ da geometria, o lado oposto ao ângulo de 30° (BC) deve ter um comprimento de 1 da hipotenusa, então $BC = 1$

1

$\cdot 1 =$. Pelo mesmo

2

2

2

teorema, o lado oposto ao ângulo de 60° (AC) deve ser 3 vezes o lado BC , então

22/05/2014 14:52:29

Capítulo 10: Sendo Dobrado pelos Ângulos 143

Os ângulos no mesmo quadrante devem ter o mesmo padrão de sinais: I = $(+, +)$, II = $(-, +)$, III = $(-, -)$ e IV = $(+, -)$

Acredite em mim, embora talvez você se sinta desconfortável no início, o círculo unitário logo se tornará seu melhor amigo. Aprenda-o. Memorize-o. Vá a seu restaurante favorito e converse sobre o sentido da vida e diga se você acha ou não o boneco Alf engraçadinho.

Exemplo 4: Usando o círculo unitário e os ângulos côngruos, mas sem usar calculadora, calcule o

Solução: Encontre o ângulo côngruo de que recai no círculo unitário adicionando 2π a ele:

Como e são côngruos, o

porque os ângulos côngruos

têm os mesmos valores trigonométricos. Observe que o ângulo cruza o círculo unitário no ponto $(0, -1)$; o cosseno é o valor de x desse par de coordenadas, então

Você Tem Problemas

Problema 4: Usando o círculo unitário e os ângulos côngruos, mas sem usar calculadora, calcule $\sin$

O Mínimo que Você Precisa Saber

Um ângulo na posição padrão tem um vértice em (0,0) e seu lado inicial se sobrepõe ao eixo x positivo.

Multiplique uma medida em grau por
para converter para radianos e
multiplique uma medida de radiano por
para converter para graus.

Somar 2π (ou 360°) ou subtrair esse valor de um ângulo na posição padrão resulta em um ângulo côngruo, que terá os mesmos valores da função trigonométrica.

A coordenada x do ponto de intersecção de um ângulo com o círculo unitário é o valor do cosseno desse ângulo; a coordenada y é o valor de seu seno.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 143

22/05/2014 14:52:31

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 144

22/05/2014 14:52:31

Capítulo 11

Representando

Graficamente Funções

Trigonométricas

Neste Capítulo:

O giro infinito das funções periódicas

Aplicação de transformações em gráficos trigonométricos

Definição e representação gráfica de tangente,

cotangente, secante e cossecante

Quando eu tinha 10 anos, tinha aquelas aspirações juvenis realmente doidas (ok, admito que aos 20 algumas delas ainda existiam). Você sabe o que quero dizer, queria ser um executivo astronauta que se torna presidente conforme escala o Monte Everest durante as férias de verão como superespião e agente secreto. Além disso, queria fazer parte de uma banda de rock and roll (embora só soubesse tocar trompete, que não é o instrumento mais rock da face da Terra), e todas as mulheres do mundo ficariam loucas por mim quando me vissem. Então, você chega aos 30 e percebe que as coisas não acontecem do modo como você previu em seus sonhos mais loucos.

Em vez de um presidente James Bond *sexy*, me tornei um careca, parecido com o cara da propaganda do *Bombril*, que curte matemática mais que a exploração da Lua e cuja atividade física mais agitada é um estimulante jogo de futebol de computador.

PF.CG.TCIG_Pre_Calculus.indb 145

22/05/2014 14:52:31

146 Parte 3: Trigonometria

Em pouco tempo, a vida se torna um tanto previsível. Acordo, tomo banho, vou trabalhar, tento achar um lugar onde possa almoçar por menos de R\$10,00, dirijo de volta para casa, passo um tempo com a família, lavo a louça, coloco meu filho para dormir, assisto um pouco de televisão com minha mulher, vou para a cama e então começo tudo de novo no dia seguinte.

De vez em quando me pergunto: “Estou dentro do comportamento esperado?”

Como posso não estar explorando Marte ou tentando sem sucesso me defender das investidas sexuais agressivas da modelo Rebecca

anos, achava que tinha um potencial ilimitado e que cada dia seria uma aventura; acontece que minha maior aventura costuma ser não encontrar a chave do meu carro. Mas isso é que é engraçado, sempre que minha rotina é perturbada, fico infeliz. Uma vida previsível para mim significa uma vida muito feliz, para a grande decepção do meu eu de 10 anos de idade. A maturidade traz a apreciação das coisas que eu antes temia.

O mesmo ocorre com as funções matemáticas. (Eu sei, você duvida que eu venha a conseguir ligar esse assunto à matemática, mas fique aí parado e espere essa mágica acontecer). Todas as funções que discutimos até agora (exponenciais, com raiz, racionais e polinomiais) apontam para o infinito (ou para o infinito negativo) nos limites de seus gráficos. Elas têm muitas esperanças e querem alcançar as estrelas em seus projetos simplistas de vida. As funções trigonométricas, como você verá neste capítulo, têm objetivos muito mais razoáveis: elas têm uma rotina feliz e preferem repetir seus gráficos por toda a eternidade, como eu.

Funções Periódicas

Todas as seis funções trigonométricas (até agora você só conhece três delas – seno, cosseno e tangente –, mas você conhecerá as outras até o fim deste capítulo) são *funções periódicas*. Como a metáfora de minha vida feliz e previsível, cada uma tem seus altos e baixos, mas, por fim, se repetem para sempre. Observe as funções periódicas que desenhei na Figura 11.1.

Uma rápida olhada na função da Figura 11.1 deve ser tudo o que você precisa para descobrir que ela é periódica, porque se repete sempre como um monitor cardíaco doido. Uma questão-chave que você deve se perguntar sobre as funções periódicas: “O quanto (contado em unidades horizontais no plano cartesiano) leva para que o gráfico se repita?”. A resposta para essa questão é um número denominado *período* da função.



Capítulo 11: Representando Graficamente Funções Trigonométricas

147

Figura 11.1

*Uma função periódica pode
ser caracterizada por seu
amplitude período e sua amplitude,*

6

=

dois atributos que podem

$2 = 3$

ser contados em um plano

cartesiano ou calculados por

meio de outras técnicas mais

Período = 9

inteligentes, rápidas e

menos chatas.

Para calcular o período, identifique dois pontos correspondentes em duas repetições consecutivas do gráfico. Na Figura 11.1, marquei $(-3,3)$ e $(6,3)$; é fácil indicá-los, porque eles marcam a extremidade da seção horizontal de cada segmento repetido.

Conte o número de espaços horizontais pelos quais você precisa passar para ir de $(-3,3)$ até $(6,3)$, e você obterá um período de 9.

Se você preferir usar uma técnica de

formulação para calcular o período,

subtraia os valores de x e tome o valor

Fale a Linguagem

absoluto: $-3 - 6 = 9$ ou $6 - -(3) = 9$.

Uma função periódica

(Os valores de y dos pontos que você

se repete depois de uma distância

escolhe sempre serão iguais porque,

horizontal fixa denominada

quando você termina uma repetição

período. A altura total de uma

completa do gráfico, está de volta à

função periódica dividida por 2 é

altura em que iniciou.)

denominada **amplitude**.

A *amplitude* de uma função periódica descreve o intervalo entre o meio da função e seu ponto mais alto ou mais baixo. Em outras palavras, ela mede metade da altura total da função. Para calculá-la, primeiro identifique cada um dos pontos mais altos e mais baixos do gráfico – eu marquei (3,4) e (10,-2) – e conte o número de espaços verticais entre eles ou calcule o valor absoluto da diferença de seus valores de y . De qualquer modo, você acabará com 6. Para obter a amplitude, divida esse número por 2, assim: $6 \div 2 = 3$.



148 Parte 3: Trigonometria

Você Tem Problemas

Problema 1: Identifique o período e a amplitude da função periódica a seguir com base em seu gráfico.

Figura 11.2

*Poucas funções
periódicas daqui
para frente serão
tão pontiagudas e
faiscantes, então,
sinta-se à vontade
para retirar seus
óculos de proteção.*

Representando Graficamente o

Seno e o Cosseno

Eu já estraguei a surpresa e disse a você que todas as funções trigonométricas eram periódicas, mas consegue descobrir por quê? O que há na natureza do seno e do cosseno que sugere que seus valores se repetirão continuamente? Lembre-se de que os valores

dessas duas funções vêm do círculo unitário, que

Alerta do Kelley

discutimos no fim do Capítulo 10. Depois que os

Embora os ângulos

ângulos vão além de 2π , eles já deram uma volta

trigonométricos sejam normalmente

em torno do círculo unitário e começam a se

expressos como letras gregas, é

repetir como ângulos congruos.

comum ver funções escritas como

Espere um minuto, deixe-me repetir: depois

“ $f(x) = \sin x$ ” em vez de “ $f(\theta) = \sin \theta$ ”.

que os ângulos do seno e cosseno ficam

Às vezes, escreverei as funções em

maiores que 2π , as funções começam a se

termos de x e outras vezes escreverei

repetir. Isso soa familiar, não é? Isso significa

usando θ , mas qualquer que seja a

que 2π é o período do seno e do cosseno! Será

variável usada, o modo como você

mais fácil verificar isso, contudo, se você olhar

resolverá os problemas não mudará.

um gráfico do seno e tratá-lo como as funções

periódicas que examinou há duas páginas.



Capítulo 11: Representando Graficamente Funções Trigonômétricas

149

Conectando os Pontos por Diversão e Lucro

Para representar graficamente $f(x) = \sin x$, indicarei alguns pontos, até que possa ter uma boa ideia da forma do gráfico. Entretanto, aviso a você que os gráficos das funções trigonométricas são um pouco diferentes dos gráficos de linhas e polinômios. A maior mudança está no modo como você irá lidar com o eixo x .

Como as funções trigonométricas requerem entradas de ângulos, o eixo x terá ângulos do círculo unitário (como 0 , $\pi/2$ e π) em vez dos números inteiros com os quais estava acostumado.

Para obter o gráfico mais preciso que consigo fazer, usarei todos os ângulos no círculo unitário entre $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$ para gerar o gráfico da $f(x) = \sin x$. Nenhum cálculo real está envolvido, já que o valor de y de cada ponto do círculo unitário representa o seno. Assim, $\sin(0) = 0$, $\sin 0,5$, $\sin$

$0,707$,

$\sin$

$0,866$, $\sin$

e assim por diante, até $\sin(2\pi) = 0$.

Isso significa que os pontos $(0,0)$,

$0,5$,

$0,707$,

0,866 ,

, até $(2\pi, 0)$

formam o gráfico da $f(x) = \sin x$, como você pode ver na Figura 11.3

Figura 11.3

$$f(x) = \sin x$$

O gráfico de $\sin x$

normalmente é referido

como a onda do seno e tem

até seu próprio adjetivo –

todo o gráfico que tem uma

forma ondulada de seno é

descrito como senoidal (o que

na verdade parece ser um

bom nome para um remédio

contra alergia).

Ponto Crítico

Se você fosse indicar o número de horas de dia (à luz do Sol) a cada dia no curso de 1 ano, acabaria com um gráfico que se parece muito com $y = \sin x$. Nesta analogia, $\theta = 0 = 2\pi$ representa o equinócio da primavera e $\theta = \pi$ representa o equinócio de inverno (quando as horas de luz e escuridão são iguais). Os solstícios de verão e inverno (o máximo e mínimo de luz em um dia, respectivamente) ocorreriam em e

.



150 Parte 3: Trigonometria

Todos os pontos na Figura 11.3 marcam os ângulos do círculo unitário (como o seno é periódico, segui adiante e desenhei outro período do gráfico no intervalo $[-2\pi, 0]$

também). Agora que você tem o gráfico (e consegue ver que ele cai definitivamente na categoria periódica), é fácil descobrir o período e a amplitude. A origem e $(2\pi, 0)$ representam os pontos correspondentes em repetições consecutivas do gráfico, então o período é $|0 - 2\pi| = 2\pi$, como adivinhamos que seria. Para obter a amplitude, subtraia uma das alturas mais baixas (-1) de uma das alturas mais altas (1) . Tome o valor absoluto $(1 - (-1) = 2)$ e divida por 2 para obter uma amplitude de $2 \div 2 = 1$.

O gráfico do seno também tem três atributos

Ponto Crítico

importantes:

Lembre-se de que o modo de

Todos os interceptores de x caem em

declarar matematicamente

múltiplos inteiros de π : ..., -2π , $-\pi$, 0π , π ,

“todos os ângulos côngruos”

2π , ... Em outras palavras, os ângulos $\theta = 0$,

de algum ângulo θ é escrever

$\theta = \pi$ e todos os seus ângulos côngruos

“ $\theta + 2k\pi$, onde k é um número

($\theta = 0 + 2k\pi$ e $\theta = \pi + 2k\pi$), onde k é um inteiro”, já que somar e subtrair

número inteiro.

um múltiplo de 2π é o modo como se

gera, de fato, os ângulos côngruos.

O valor máximo do gráfico do seno (1)

ocorre em π

$\theta = 2$

= e todos os seus ângulos

côngruos:

; o valor mínimo(-1)

ocorre em

e em todos os seus

ângulos côngruos

O *domínio* da $f(x) = \sin x$ está em todos os números reais e o *intervalo* é $[-1,1]$.

Fale a Linguagem

Caso você tenha esquecido, o **domínio** de uma função é o conjunto de suas entradas válidas; o **intervalo** é o conjunto de números que são

possíveis saídas. Por exemplo, o domínio da $f(x) = x$ é $[0, \infty)$ (você pode tomar a raiz quadrada somente de 0 ou um número positivo) e o intervalo é $[0, \infty)$ também (quando você toma a raiz quadrada de algo, obtém 0 ou um número positivo).

Some o gráfico do seno a seu repertório memorizado. Logo, começarei a pedir para você representar graficamente funções de seno com transformações, e poupará muito tempo (e reduzirá suas lágrimas de frustração consideravelmente) se souber o gráfico de cor.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 150

22/05/2014 14:52:36

Capítulo 11: Representando Graficamente Funções Trigonômicas **151**

Tempo de Brilhar do Cosseno

Você pode usar a mesma técnica que usei para o seno para obter o gráfico da $g(x)$

$= \cos x$ (Figura 11.4). Embora não seja uma grande surpresa que o cosseno também tenha um período de 2π e uma amplitude de 1 (isso vem do círculo unitário, assim como o seno, e tem todos os mesmos valores, embora seja em uma ordem diferente), você pode ficar surpreso ao notar que tem a mesma forma. De fato, se fosse deslocar o gráfico do cosseno à direita unidades, obteria o *exato* gráfico do seno.

Figura 11.4

$$g(x) = \cos x$$

O gráfico da

$$g(x) = \cos x \text{ é}$$

estranhamente

reminiscente de um

gráfico de seno. É

quase como se fossem

gêmeos idênticos

(mas você consegue

diferenciá-los

porque o seno

cruza a origem).

As características principais do gráfico do cosseno espelham as do seno. Ele tem interceptores de x repetitivos (que ocorrem em

e

), um

valor máximo de 1 (em $\theta = 0 + 2k\pi$) e um valor mínimo de -1 (em $\theta = \pi + 2k\pi$).

Representando Graficamente Funções Trigonométricas

As transformações de funções que aprendeu no Capítulo 6 funcionam do mesmo modo quando você está representando funções trigonométricas graficamente.

Somar uma função trigonométrica ainda move a função para cima e subtrair dentro da função ainda move a função à direita. Você deve conhecer duas dicas, entretanto, que são especialmente úteis para as funções periódicas porque lidam com amplitude e período:

Se seno ou cosseno são multiplicados por um número, o valor absoluto desse número é a amplitude. Na função $k(x) = -3\cos x + 1$, o -3 na frente diz que a amplitude do gráfico é $|-3| = 3$. De forma prática, isso significa PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 151

22/05/2014 14:52:37





152 Parte 3: Trigonometria

que o gráfico da $k(x)$ (antes de ser movido

Ponto Crítico

para cima em uma unidade) se esticará

Quando você representou

a uma altura máxima de 3 e mínima de

graficamente $\sin x$ e $\cos x$

-3 , em vez da usual altura máxima do

anteriormente, calculou a

cosseno de 1 e mínima de -1 .

amplitude subtraindo a altura

máxima e a mínima, tomando o

O coeficiente de x diz quantas vezes o

valor absoluto e dividindo por 2

gráfico se repetirá no período original

para obter uma amplitude de 1. Agora

da função. Na função $j(x) = 4\sin(2x) - 1$, você sabe que as amplitudes de $\sin x$

o coeficiente de x é 2, o que significa que

e $\cos x$ são iguais a 1 porque esse é o
duas repetições completas do gráfico
número (implícito) na frente de ambas
ocorrerão em $[0, 2\pi]$ (o período original)
as funções ($1 \sin x$ e $1 \cos x$).

em vez de somente 1. Para calcular o
período da $j(x)$, use esta fórmula:

período original

novo período

coeficiente de x

Como o coeficiente de x da $j(x)$ é 2 e o período original de $\sin x$ é 2π ,
o período da $j(x)$ é

.

Lembre-se de que multiplicar dentro de uma função por um número maior que 1 faz com que a função fique apertada horizontalmente na direção do eixo y , e isso é exatamente o que ocorre lá. A amplitude do gráfico não muda; $j(x)$ vai para cima e para baixo, duas vezes mais rápido do que aconteceria sem esse coeficiente 2. (Você representará $j(x)$ no próximo “Você Tem Problemas”.) **Ponto Crítico**

É melhor representar graficamente as transformações de funções trigonométricas nesta ordem:

1. Mudança de período (se houver um coeficiente de x) 2. Mudança de amplitude (se a função trigonométrica tiver um coeficiente) 3. Reflexos (se o lado de dentro ou de fora da função é multiplicado por um número negativo) 4. Deslocamentos horizontais e verticais (resultantes da adição e da subtração).

Transformações de gráficos trigonométricos não é um assunto preocupante. Se esforce em desenhar um período bom e preciso do gráfico no plano de coordenadas e então só preencha o resto do eixo horizontal com cópias desse período.

Capítulo 11: Representando Graficamente Funções Trigonométricas

153

Exemplo 1: Esboce o gráfico da $k(x) = -3\cos x + 1$ no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

Solução: Este problema especificamente pede para desenhar um gráfico cujo eixo x começa em -2π e termina em 2π , mas você deve sempre supor que esse é o intervalo que deverá ser representado se nenhum estiver indicado pelo problema (observe que as Figuras 11.3 e 11.4 também usam esse intervalo).

Três transformações mudam o velho e simples $\cos x$ para $k(x)$: multiplicar a função por 3 (o que torna sua amplitude 3), aplicar um reflexo através do eixo x (já que 3 é negativo) e deslocar verticalmente todo o gráfico para cima em uma unidade.

Você deve aplicar essas transformações nessa ordem, e acabará com o gráfico da Figura 11.5.

$$k(x) = -3 \cos x + 1$$

Figura 11.5

O gráfico da

$$k(x) = -3\cos x + 1$$

(a curva sólida) e

o gráfico original,

não transformado

de $y = \cos x$ (a curva

pontilhada).

Você Tem Problemas

Problema 2: Esboce o gráfico de
no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

Conheça o Resto da Família

Neste ponto, você já está inserido na trigonometria e é tarde demais para voltar atrás. Como dizem no jogo de pôquer (que eu acho estranhamente hipnótico na televisão), você está “destinado ao banco”, você colocou tanto nessa jogada que desistir agora não seria um investimento sábio dos recursos.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 153

22/05/2014 14:52:38

154 Parte 3: Trigonometria

É como sair com a mesma pessoa por tanto tempo que chega a hora de conhecer o resto da família. É claro, talvez você tenha conhecido um irmão, ou irmã, ou até mesmo um dos pais, mas quando tiver cruzado o limite indescritível de estar com alguém “há tempo suficiente”, você precisa dedicar um tempo para conhecer as tias, os tios, primos, avós, gato de estimação do vizinho do cabeleireiro favorito da amiga da irmã e assim por diante.

Então, coloque um grande sorriso no rosto (mesmo que seja falso) e se prepare para conhecer o resto das funções trigonométricas. Certifique-se de aprender todos os seus gráficos enquanto estiver por aí.

Tangente

Você já conheceu a tangente, mas não sabe muito sobre ela. De fato, você provavelmente se surpreenderia ao descobrir não somente que a tangente é igual ao lado oposto dividido pelo lado adjacente de um ângulo agudo (como aprendeu na seção “Trigonometria do Triângulo Retângulo” no Capítulo 10), mas é sempre igual ao seno de um ângulo dividido por seu cosseno: sen

tg

.

O gráfico da tangente (veja a Figura 11.6) é bem diferente dos gráficos do seno e do cosseno, mesmo que seus valores venham diretamente de seus quocientes. Isso ocorre porque a tangente é uma função racional – tem $\cos \theta$ no denominador, que tem um valor de 0 em $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$, e em todos os seus ângulos cômplementos. Assim, a

tangente sempre terá uma assíntota vertical em cada um de seus locais.

Figura 11.6

O gráfico de y

$= \tan x$. Observe

que a função

tangente passa

pela origem (já que

$\sin$

)

e tem assíntotas em

todos os $k\pi$, onde

2

k é um número

inteiro ímpar.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 154

22/05/2014 14:52:39



Capítulo 11: Representando Graficamente Funções Trigonômétricas

155

As outras diferenças importantes entre o gráfico da tangente e os do seno e do cosseno estão no fato de que a tangente tem um período de π (em vez de 2π) e não tem amplitude. Como o gráfico da tangente se estende infinitamente para cima e para baixo, não há alturas “máximas” e “mínimas”, então seria impossível calcular o valor absoluto de suas diferenças. (De fato, nenhuma das funções trigonométricas restantes tem uma amplitude mensurável como seno e cosseno.) **Cotangente**

O recíproco da $\tan \theta$

é conhecido como a função cotangente e é abreviada

sen

como $\cotg \theta$. A cotangente também é denominada *cofunção* da tangente porque tem o mesmo nome da função da tangente, mas com o prefixo “co-” na frente. Como a tangente, o gráfico da cotangente (veja a Figura 11.7) terá um período de π e várias assíntotas verticais, agora localizadas em cada múltiplo de π , onde o denominador ($\text{sen } \theta$) é igual a 0.

Figura 11.7

O gráfico da cotangente

se parece com o da

tangente, só que refletido

sobre o eixo y (ele sobe

para a esquerda e desce

para a direita, o oposto

da tangente) e movido

unidades para a direita.

Talvez tenha levado um tempo para

descobrir qual era o seno, o cosseno e a

tangente, porque todos foram definidos

Fale a Linguagem

como razões dos lados dos triângulos

Se duas funções têm o

retângulos. Entretanto, a cotangente

mesmo nome uma da outra, exceto

não poderia ser mais fácil: tudo o que

pelo fato de uma delas iniciar com
você precisa fazer é pegar o recíproco da
“co-” (como seno e **co**sseno ou
tangente. Só isso.

tangente e **co**tangente), elas são
denominadas (de maneira bastante
apropriada) de **cofunções**.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 155

22/05/2014 14:52:40



156 Parte 3: Trigonometria

Secante e cossecante

As duas funções trigonométricas finais também são recíprocas das funções trigonométricas que você já conhece. A secante (abreviada “sec”) é definida como a recíproca do cosseno:

e a

cossecante (abreviada “cossec”) é a recíproca do

Alerta do Kelley

seno: cossec

θ

A secante e o seno não

sen . Como suas recíprocas, a

θ

são recíprocos um do outro (nem a

secante e a cossecante têm períodos de 2π , mas

cossecante e o cosseno), embora eles

como são funções racionais, os gráficos da

comecem com a mesma letra. Então,

secante e da cossecante mais uma vez

não deixe isso confundi-lo.

apresentarão assíntotas verticais e curvas

infinitamente altas.

O gráfico da secante (veja a Figura 11.8) terá as mesmas assíntotas verticais que a tangente, pois compartilham o mesmo denominador ($\cos \theta$)

Figura 11.8

O gráfico de $y = \sec \theta$

– um padrão infinito

de lombadas viradas

para cima e para baixo

– é a curva sólida nos

eixos de coordenadas.

A curva pontilhada é

o gráfico do cosseno (o

*recíproco da secante),
que ajuda a marcar o
mínimo e o máximo
de pontos no gráfico
da secante e tem
interceptores x em
cada assíntota vertical.*

Para desenhar o gráfico da secante, primeiro projete as assíntotas verticais em seus locais (em $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ e ângulos cômplementares) e, então, esboce de leve o gráfico do cosseno.

As curvas em forma de tigela da secante sairão do ponto máximo e do ponto mínimo do cosseno, aproximando-se rapidamente das assíntotas verticais (mas nunca cruzando).

O gráfico da cossecante é muito similar ao da secante. Como você pode ver na Figura 11.9, ele tem assíntotas verticais (desta vez, todos os múltiplos de π) e cobertura na forma de tigela que saem do ponto máximo e mínimo do seno. Note que a faixa da secante e da cossecante é $(-\infty, -1]$ ou $[1, \infty)$ – somente os valores da função entre -1 e 1 são excluídos.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 156

22/05/2014 14:52:41



Capítulo 11: Representando Gráficamente Funções Trigonométricas
157

Figura 11.9

*Desta vez, a curva
pontilhada é o gráfico
de $y = \sin \theta$ e está
saindo do ponto mais
alto e do ponto mais
baixo do gráfico
pontilhado que é seu
recíproco ($y = \csc \theta$), a curva mais forte.*

Ponto Crítico

Sem nenhum cálculo, você pode descobrir instantaneamente se alguma função trigonométrica para um dado ângulo será positiva ou negativa. Tudo o que você precisa saber é em qual quadrante está o lado final do ângulo.

Figura 11.10

*As funções
listadas em cada
seno
Todas as funções
quadrante informam
cossecante trigonométricas
quais funções
trigonométricas são
positivas para os lados
finais localizados lá.*

tangente

cosseeno

cotangente

secante

Marquei na Figura 11.10, em cada quadrante, as funções trigonométricas que são positivas se o lado final do ângulo está localizado lá. Por exemplo, o lado final de está no quadrante IV, então você sabe automaticamente que o e a

são

positivos, mas o sen

e a tg

, cotg

e cossec

serão negativos.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 157

22/05/2014 14:52:43

158 Parte 3: Trigonometria

Exemplo 2: Avalie as seis funções trigonométricas para

.

Solução: Os valores do seno e do cosseeno para θ vêm do círculo unitário: e sen

. A tangente é igual ao quociente dos valores do seno

e do cosseeno, mas como eles estão em oposição em relação um ao outro, serão cancelados, deixando um valor de -1 para a tangente:

sen

Calcular as três funções restantes é fácil, elas são as recíprocas das funções que você acabou de descobrir. A cotangente é a recíproca da tangente (-1), a secante é a recíproca do cosseeno (-2) e a

cossecante é a recíproca do seno ($\frac{1}{\sin \theta}$). Alguns ($\frac{1}{\sin \theta}$)

($\frac{1}{\sin \theta}$)

professores de matemática ficam irritados ao ver sinais de raiz no denominador em forma de fração e preferem multiplicar a parte superior e inferior da secante e da cossecante pela 2 para reescrever as frações. Isso não é necessário, mas, se você quiser, obterá ; de modo similar, cossec

.

Você Tem Problemas

Problema 3: Avalie as seis funções trigonométricas para o ângulo

.

O Mínimo que Você Precisa Saber

As funções periódicas se repetem a cada vez que passam por uma distância horizontal fixa denominada *período*.

Todas as seis funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante) são periódicas.

A cotangente é a recíproca da tangente, a secante é a recíproca do cosseno e a cossecante é a recíproca do seno.

O cosseno, o seno, a secante e a cossecante têm um período de 2π , mas a tangente e a cotangente têm um período de π .

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 158

22/05/2014 14:52:45

Capítulo12

Identidades

Neste Capítulo:

Descrição da diferença entre equações e identidades

Destacando identidades básicas

Simplificação de expressões usando identidades

Verificação de equações de identidades

Aplicação de identidades de ângulos duplos

Uma das expressões-chave que surgiu no início do século XXI é “ladrão de identidade” – um crime em que um imbecil descobre algumas de suas informações de identificação exclusivas e pessoais (como seu aniversário, número de RG, nome de solteira de sua mãe, quem é seu primo mais baixinho, seu personagem favorito de *Vila Sésamo*) e as usa para se passar por você. Talvez esses ladrões solicitem um cartão de crédito com o seu nome e peguem sua correspondência sem que saiba (e saiam gastando como se o mundo fosse terminar), ou talvez eles simplesmente roubem o número de seu cartão de crédito e, antes que saiba, a MasterCard estará ligando para você querendo saber por que gastou R\$25.000,00 em pinguins.

É claro que nunca comprou pinguins (e se tivesse comprado, eu preferiria não saber, falando sério), então enlouquece e delira até descobrir que alguém está fingindo ser você e, por alguma razão, está comprando aves exóticas. Onde a loucura terminará?



160 Parte 3: Trigonometria

Corujas? Tucanos? Pterodáctilos? Você se sente violado e irritado com todas essas compras ilegais e o departamento de fraude da empresa do cartão de crédito parte para a ação.

Como falcões (os pássaros de novo), esses super-heróis contadores assistem à atividade de seu cartão de crédito de perto para saber quem está com sua identidade, embora o falsário (é assim que chamam o sujeito no ramo) não se pareça em nada com você. Neste capítulo, você faz o papel do inspetor de fraudes da empresa de cartão de crédito, provando que duas afirmações trigonométricas, embora talvez não sejam parecidas, têm de fato exatamente a mesma identidade.

Treinamento Básico

Antes que os criminosos (e as equações trigonométricas) comecem a botar medo em você, é necessário algum treino. Você terá que aprender os comportamentos mais comuns, como a maneira que as expressões trigonométricas se mascaram.

Esta seção tem por foco as *identidades* mais básicas. Sua primeira lição: o que é uma identidade? Bem, é uma equação, mas um tipo especial de equação – enquanto a maioria das equações tem somente uma, duas, ou um número finito e fixo de soluções, uma

identidade é verdadeira com qualquer valor

Fale a Linguagem

associado a ela (contanto que seja um valor

Uma **identidade**

legal – se ele deixar uma das funções

trigonométrica é uma equação que é

indefinida, todas as apostas são inválidas).

verdadeira não importa qual ângulo

seja substituído nela.

De acordo com essa definição, então, esta

equação é, na verdade, uma identidade:

É claro que a equação é verdadeira – a ordem não importa ao somar duas coisas, mas você já sabia isso desde o Capítulo 1, porque essa é a propriedade comutativa.

As identidades que estou prestes a apresentar a você são um pouco diferentes desse exemplo simplório, porque não são tão obviamente iguais quando observadas pela primeira vez, o que as tornará ferramentas mais poderosas mais adiante.

Identidades de Sinais

Funções trigonométricas diferentes se comportam de maneiras diferentes quando você insere uma entrada negativa, e essa é a base das identidades de sinais:

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec \theta$$

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 160

22/05/2014 14:52:45

Capítulo 12: Identidades Trigonômétricas 161

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

$$\cotg(-\theta) = -\cotg \theta$$

$$\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec} \theta$$

Basicamente, isso significa que os valores do cosseno e da secante de um ângulo e seu oposto são exatamente a mesma coisa, então o

e o

são iguais,

como são seus recíprocos, os valores da secante. Contudo, as outras quatro funções trigonométricas fornecerão valores opostos ao se substituir em ângulos opostos. Por exemplo, $\sin$

, mas $\sin$

.

Como Você Fez Isso?

Somente o cosseno e a secante fornecem a mesma saída para entradas opostas, pois são funções pares. Em álgebra, você aprendeu que cada ponto (x, y) em uma função par tem um ponto irmão $(-x, y)$ no gráfico, o que não somente garante que entradas opostas tenham as mesmas saídas, como também faz com que o gráfico seja simétrico com y (as partes do gráfico em qualquer lado do eixo y são reflexos exatos uma da outra).

Seno, tangente, cossecante e cotangente são funções ímpares, com gráficos simétricos em relação à origem. Nessas quatro funções, você tem um ponto (x, y) no gráfico, também terá o ponto $(-x, -y)$, então as entradas opostas $(x \text{ e } -x)$ resultam em saídas opostas $(y \text{ e } -y)$.

Identidades de Cofunções

Quando eu estava apresentando a função cotangente, no Capítulo 11, expliquei que seu gráfico parecia muito com o da tangente. Especificamente, se você refletir o gráfico da tangente sobre o eixo y e, então, movê-lo unidades à direita, obterá o gráfico da cotangente. De forma bastante surpreendente, se você fizer o mesmo com o gráfico da cotangente, acabará novamente com o gráfico da tangente.

Essa estranha propriedade não é específica da função tangente e cotangente. De fato, essas duas transformações convertem qualquer função trigonométrica em sua cofunção, o que é a base das

identidades das seis cofunções.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 161

22/05/2014 14:52:46

162 Parte 3: Trigonometria

$\sin \theta$ e $\sin$

$\tan$

$\cot \theta$ e $\cot \theta$

$\tan$

cosec e cosec

Você Tem Problemas

Para deslocar uma função, como $f(\theta) = \cot \theta$, unidades à direita, subtraia o valor dentro da função: $f(\theta) = \cot \theta - \pi$. Se você quiser refletir a $f(\theta)$ no eixo y , multiplique o 2

que está dentro da função por um valor negativo: $f(\theta) = \cot \theta + \pi$

+

, que é igual a

2

$f(\theta) = \cot \pi \theta$

2

. É daí que vem o número entre parênteses para as identidades de cofunções.

Exemplo 1: Demonstre a identidade da cofunção sen

se

.

Solução: Se você substituir

na identidade, deverá obter um resultado

verdadeiro:

π

sen (

)

$$2 - \pi^4 = \cos \pi^4$$

2π

sen (

)

$$4 - \pi^4 = \cos \pi^4$$

π

$$\text{sen } 4 = \cos \pi^4$$

2

2

$$2 = 2$$

Identidades Recíprocas

No Capítulo 11, você aprendeu que a cotangente, a secante e a cossecante são definidas como recíprocas da tangente, do cosseno e do seno (nesta ordem), então, essas identidades não são novas.

e

$$\operatorname{cosec}\theta = 1$$

$$\text{e } \operatorname{sen}\theta =$$

$$1$$

$$\operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{cosec}\theta$$

$$\operatorname{tg}\theta = 1$$

$$\text{e } \operatorname{cotg}\theta = 1$$

$$\operatorname{cotg}\theta$$

$$\tan\theta$$

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 162

22/05/2014 14:52:53

Capítulo 12: Identidades Trigonométricas 163

Mantenha em mente que a relação entre recíprocos funciona em ambos os sentidos.

Então, se a cotangente é a recíproca da tangente, a tangente é a recíproca da cotangente também.

Identidades Pitagóricas

Na geometria (não antes), você aprendeu que o Teorema de Pitágoras, segundo o qual um triângulo retângulo com lados a e b e hipotenusa c irão satisfazer a equação . Como os valores do seno e do cosseno são baseados em um triângulo retângulo incorporado em um círculo unitário, você pode usar o Teorema de Pitágoras para criar uma das identidades trigonométricas mais úteis.

Na Figura 12.1, desenhei um ângulo genérico (θ) no círculo unitário. Lembre-se de que o ponto de intersecção de seu raio final e o círculo

unitário será $(\cos \theta, \sin \theta)$.

Pense sobre o que isso significa: para ir da origem até o ponto do círculo unitário, você precisa deslocar $\cos \theta$ unidades à direita e $\sin \theta$ unidades para cima.

Figura 12.1

As coordenadas x e y do ponto

$\sin$

no círculo unitário podem ser

tratadas como os catetos de

um triângulo retângulo do

qual a hipotenusa é 1.

$\sin$

Assim, o $\cos \theta$ e o $\sin \theta$ são os comprimentos dos catetos do triângulo retângulo na Figura 12.1 (a hipotenusa tem comprimento 1, já que é um raio no círculo unitário).

De acordo com o Teorema de Pitágoras...

$\sin$

$\sin$

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 163

22/05/2014 14:52:54



164 Parte 3: Trigonometria

Todas as funções trigonométricas, não somente o seno e o cosseno, estão de algum modo relacionadas pelo Teorema de Pitágoras. Esta família de três identidades pitagóricas é tão importante que nomeei cada uma de um jeito:

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \text{ (teorema mamãe)}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \text{ (teorema papai)}$$

Alerta do Kelley

$$1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta \text{ (teorema filhinho)}$$

Observe que os

Lembre-se de que sou o único a usar esses

valores $(\cos \theta)^2$ e $\cos^2 \theta$ significam

nomes para as identidades pitagóricas. Então, se

exatamente o mesmo – a segunda

você alguma vez escrever “Provei isso usando

notação é simplesmente um jeito mais

o teorema mamãe” sem explicar o que está

curto de escrever, que não requer

querendo dizer, o professor de matemática,

parênteses. Você não deve escrever

seus colegas, os funcionários da instituição onde

$(\cos \theta)^2$ como $\cos \theta^2$ porque então

você estuda, seus ancestrais, os caixas do banco

parece que só o θ é elevado ao

onde você tem conta, as garçonetes da tão
quadrado – é por isso que se escreve
esperada sexta-feira que graças a Deus chegou
o expoente perto da função.
e, quem sabe, toda a humanidade, pensarão que
você está doido (e eu não vou estar por perto
para dizer que eles estão errados).

Treinamento Avançado: Simplificação de

Expressões Trigonométricas

Agora você tem um arsenal enorme de ferramentas de detecção de identidade à sua disposição. Se uma expressão trigonométrica aparecer na sua frente com um sinal negativo, como $\sec(-\theta)$ – um disfarce matemático equivalente a um bigode falso com adesivo – você saberá que é realmente a $\sec \theta$ que está por trás desse disfarce horrível. Claro, a secante pode ficar com uma aparência um pouco diferente com esse ângulo negativo, mas você sabe desde o treinamento básico que, com ângulo negativo dentro ou não, a secante tem o mesmo valor.

Você pode até manipular o que aprendeu no treinamento básico para lidar com situações novas. Por exemplo, você poderia reescrever a expressão $1 - \cos^2 \theta$, mesmo sem uma identidade que contenha o valor *exato*. Observe que o teorema mamãe não tem um 1 e um $\cos^2 \theta$ nele. Observe o que ocorre se você subtrai o $\cos^2 \theta$ de ambos os lados da mamãe: $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

De acordo com essa equação, $1 - \cos^2 \theta$ é na verdade igual ao $\sin^2 \theta$. Você deve se sentir à vontade para “massagear” as identidades básicas que mostrei a você até agora, como eu fiz com o teorema mamãe, para gerar novas informações. Apenas certifique-se de fazer o mesmo em ambos os lados da identidade, ou talvez o resultado seja inválido.



Capítulo 12: Identidades Trigonômétricas

165

Antes de estar verdadeiramente pronto para sair por aí e lidar com casos de roubo de identidade, você só precisa de um pouco mais de prática com as identidades que apresentei. No exemplo a seguir, fornecerei expressões trigonométricas desnecessariamente complexas. Sua tarefa será cortar caminho no disfarce e simplificar a expressão o máximo que puder.

Exemplo 2: Simplifique cada uma

das expressões a seguir

Ponto Crítico

Quando uso a expressão

a.

“massagear” as identidades,

Essa expressão contém

quero dizer que você pode fazer

dois termos somados, mas
pequenas mudanças, como faria
o termo à esquerda é, na
em qualquer equação, como
verdade, o produto de três
somar ou multiplicar ambos
coisas, cada uma das quais
os lados pelo mesmo valor. Talvez a
pode ser reescrita usando as
ideia de “massagear a mamãe” ou
identidades de sinais.

“massagear o papai” seja horripilante,
mas costuma ser útil, especialmente
para as identidades pitagóricas. Além
disso, os ombros cansados da mamãe
Agora, reescreva tudo em
se sentirão melhor depois disso.

termos de seno e cosseno. Em
outras palavras, escreva a $\tan \theta$
como $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$:

$\sin \theta$

$\cos \theta$

É hora de multiplicar os três

Ponto Crítico

termos. Os sinais negativos

Se às vezes você vacila

desaparecerão, já que

e simplifica expressões

negativo vezes negativo é

trigonométricas ou tenta provar

igual a positivo:

identidades trigonométricas (o

que você fará na próxima seção),

$\sin$

$\sin$

tente escrever tudo em termos de

seno e cosseno ou fatoração

$\sin$

Simplifique a fração cancelando o $\cos \theta$ no numerador e no denominador.

$\sin$

$\sin$

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 165

22/05/2014 14:52:55

166 Parte 3: Trigonometria

Se às vezes você vacila e simplifica expressões trigonométricas ou tenta provar identidades trigonométricas (o que você fará na próxima seção), tente escrever tudo em termos de seno e cosseno ou fatoração.

Você ainda não acabou, pois $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ ainda podem ser simplificados.

Está perfeitamente dentro da lei escrevê-los como $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta$ (já que a adição é comutativa), o que é igual a 1, de acordo com a mamãe. Assim, $\sin(-\theta) \cdot \tan(-\theta) \cdot \cos(-\theta) + \cos^2 \theta$ na verdade é igual a 1.

b. $\sin^2$

Imediatamente, o

dentro da função trigonométrica deve acionar uma

bandeira vermelha em seu cérebro. Você precisa usar a identidade de uma cofunção: $\cos^2 x(1 - \sec^2 x)$

Agora volte sua atenção à parte $1 - \sec^2 x$ da expressão. Se você massagear o papai só um pouquinho (os músculos do pescoço dele estão realmente tensos) subtraindo 1 de ambos os lados de sua identidade ($1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$), obterá $\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$. Bem, $\sec^2 \theta - 1$ está próximo ao que você vê no problema.

Se multiplicar ambos os lados de um papai recém-massageado por -1 , obterá

$-\tan^2 \theta = -\sec^2 \theta + 1$, ou $-\tan^2 \theta = 1 - \sec^2 \theta$. Isso está de acordo com o valor exato no problema, então substitua $1 - \sec^2 x$ por $-\tan^2 x$.

$\cos^2 x(-\tan^2 x)$

Reescreva em termos de seno e cosseno e simplifique:

$\sin^2$

$\sin$

$\sin$

Você Tem Problemas

Problema 1: Fatore e simplifique a expressão $\cos \sec^4 \theta - \cot^4 \theta$.

Provando Identidades

Seu treinamento finalmente está terminado, e você já está pronto para rastrear metaforicamente impostores de cartão de crédito fornecendo, identidades trigonométricas. Dois suspeitos serão fornecidos

22/05/2014 14:52:57



Capítulo 12: Identidades Trigonômétricas

167

são de fato iguais, manipulando as equações até obter uma resposta que seja, sem sombra de dúvida, verdadeira.

Não há uma abordagem correta para provar identidades, mas há duas escolas de pensamento populares. Uma abordagem é a que chamo de método da “velha escola”

– tratar a identidade como qualquer equação e resolvê-la somando, subtraindo, multiplicando e dividindo

igualmente dos dois lados. Por fim,

isso transforma a equação em uma

afirmação verdadeira, como “ $1 = 1$ ” ou

Ponto Crítico

“cos

Como as identidades

$2 + \sin^2 \theta = 1$ ”. Chamo de abordagem

da “velha escola” porque realmente

trigonométricas são, na

não há nada de novo a ser aprendido.

verdade, somente equações,

você pode eliminar delas todas

Outra abordagem conhecida

as frações. É só multiplicar a

é o método de “escolher um

identidade por seu mínimo

lado”, no qual você pega o lado

múltiplo comum.

da equação que aparenta ser

mais complicado e manipula somente ele, deixando o lado que parece ser mais simples para depois. Sua esperança é a de que conseguirá transformar o lado mais complicado no lado mais simples. No Exemplo 2b, você basicamente provou a identidade $\sin^2 \theta$

$\sin^2 \theta$ usando o método de “escolher um lado”,

manipulando o lado esquerdo da equação até que combinasse com o lado direito.

Normalmente, prefiro o método da “velha escola” (ou uma mistura de ambos, mas que pende para o lado da velha escola).

Exemplo 3: Prove as identidades a seguir:

a. $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$

Embora essa seja uma identidade

Alerta do Kelley

pitagórica, você pode provar que

Embora eu tenha

é verdadeira. Reescreva tudo em

provado a identidade do papai no

termos de seno e cosseno.

Exemplo 3a, não é necessário provar

$\sin^2$

uma identidade que eu tenha dito a

você anteriormente que é verdadeira.

Só provei para mostrar a você que

isso pode ser feito (e porque isso

Multiplique a equação inteira pelo

não era tão obviamente verdadeiro

mínimo denominador comum e

como o teorema mamãe, com seu útil

reduza para eliminar as frações:

diagrama do triângulo retângulo).

$\sin^2$

$\sin^2$

$\sin^2$

168 Parte 3: Trigonometria

O resultado final é a mamãe, que, (de acordo com o treinamento básico) é definitivamente verdadeiro. Então, acabou.

$$b. 1 - \operatorname{cosec} \theta$$

$$\cotg \theta$$

$$\cotg \theta$$

$$1 + \operatorname{cosec} \theta$$

Você não ama eliminar frações? A ideia de multiplicar ambos os lados por $\cotg \theta(1 + \operatorname{cosec} \theta)$ e simplificar chega a me dar um estremecimento aqui dentro:

$$\cotg \theta(1 + \operatorname{cosec} \theta)$$

$$1 - \operatorname{cosec} \theta$$

$$\cotg \theta$$

$$1$$

$$\cotg \theta$$

$$1 + \operatorname{cosec} \theta$$

$$(\cotg \theta)(1 + \operatorname{cosec} \theta)(1 - \operatorname{cosec} \theta)$$

$$\cotg^2 \theta(1 + \operatorname{cosec} \theta)$$

$$\cotg \theta$$

$$1 + \operatorname{cosec} \theta$$

$$1 - \operatorname{cosec} \theta + \operatorname{cosec} \theta - \operatorname{cosec}^2 \theta = -\cotg^2 \theta$$

$$1 - \operatorname{cosec}^2 \theta = -\cotg^2 \theta$$

Some a $\cotg^2 \theta$ e então $\operatorname{cosec}^2 \theta$ em ambos os lados da equação e obterá o teorema filhinho:

$$1 - \operatorname{cosec}^2 \theta + \cotg^2 \theta = 0$$

$$1 + \cotg^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$$

Você Tem Problemas

Problema 2: Verifique a identidade de

.

Identities para Corajosos

Por vezes, você irá se deparar com expressões trigonométricas com interiores de aparência bizarra envolvendo adição e subtração, como $\sin(x - \pi)$, ou ângulos com coeficientes, como $\cos 2\theta$. A maioria das vezes, as funções trigonométricas com o interior assim devem ser reescritas como expressões de um único ângulo – funções trigonométricas com uma variável única e simples no interior, como $\cos x$ ou $\sin \theta$.

Todo o seu treinamento antifraude estava voltado para expressões com um único ângulo, então, o processo de reescrever expressões estranhas permite que você use as identidades que já conhece. Embora as expressões com interiores estranhos não sejam raras, são muito menos comuns que as expressões trigonométricas com as quais você já trabalhou neste capítulo.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 168

22/05/2014 14:52:58



Capítulo 12: Identidades Trigonométricas

169

Fórmulas da Soma e da Diferença

Sempre que a entrada do seno ou do cosseno contiver uma soma ou diferença, reescreva-a usando as fórmulas apropriadas a seguir (apropriadamente denominadas de fórmulas da soma e da diferença):

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta$$

Como você deve ter adivinhado, o sinal de significa o “oposto de $\pm$ ”; então, os dois sinais na fórmula do cosseno devem ser opostos, enquanto os sinais da fórmula do seno são iguais.

Ponto Crítico

Exemplo 4: Reescreva usando a fórmula da soma e da diferença e Você pode verificar a resposta simplifique: $\cos(\theta - \pi)$ para o Exemplo 4 representando $\theta - \pi$.

graficamente $y = \cos(\theta - \pi)$ e

Solução: Use a fórmula do cosseno $y = -\cos \theta$ nos mesmos eixos de da diferença com $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Como coordenadas. Você pode dizer a expressão original contém um $-$, o que são iguais porque terão novo sinal será o oposto: os mesmos gráficos. De fato, você pode usar esse método de verificação $\cos(\theta - \pi) = \cos \theta \cos \pi + \sin \theta \sin \pi$ gráfica para qualquer identidade.

$$= \cos\theta(-1) + \sin\theta(0)$$

$$= -\cos\theta$$

Identidades de Ângulos Duplos

Se você encontrar ângulos duplos (como 2θ ou $2x$) em um problema de identidades trigonométricas, reescreva-os imediatamente em termos de ângulos únicos, usando a identidade do ângulo duplo:

Observe que só há uma fórmula do ângulo duplo do seno, mas há três diferentes fórmulas de ângulo duplo do cosseno que podem ser escolhidas; pegue aquela que contém as funções que combinam com as do problema no qual estiver trabalhando.

(Caso sinta vontade, você pode mostrar que as três fórmulas do cosseno são, na verdade, iguais, basta “massagear a mamãe”. Ligue $(1 - \sin^2 \theta)$ a $\cos^2 \theta$ ou $(1 - \cos^2 \theta)$ a $\sin^2 \theta$ e prove a identidade – é fácil mesmo.) PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 169

22/05/2014 14:52:59

170 Parte 3: Trigonometria

Exemplo 5: Verifique a identidade:

$$\sin 2\theta \cdot \cos 2\theta$$

$$\cos$$

$$= 2\sin\theta \cos^2\theta - 2\sin^2\theta \cos\theta$$

$$\theta + \sin\theta$$

Solução: Reescreva o numerador do lado esquerdo usando as fórmulas dos ângulos duplos. Escolha a versão $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ do $\cos 2\theta$, já que o resto da identidade tem os cossenos e os senos nela. Fatore o lado direito da equação: $2\sin\theta \cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 2\sin\theta \cos$

$$\theta \cos\theta(\cos\theta - \sin\theta)$$

$$\theta + \sin\theta$$

Observe que $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ é a diferença de quadrados perfeitos, então, fatoro-o e simplifique:

$$2\sin\theta \cos\theta (\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta)$$

$$\cos$$

$$= 2\sin\theta \cos\theta (\cos\theta - \sin\theta)$$

$$\theta + \sin \theta$$

$$2\sin\theta \cos\theta (\cos\theta - \sin\theta) = 2\sin\theta \cos\theta(\cos\theta - \sin\theta)$$

Os lados da equação combinam, então você provou a identidade.

Você Tem Problemas

Problema 3: Verifique se $\sin 2\theta = \sin$

$$3\pi = -2\cos^2\theta \sin\theta$$

$$\theta +$$

$$.$$

$$2$$

O Mínimo que Você Precisa Saber

As identidades básicas estão dentro de quatro categorias: sinal, cofunção, recíproca e pitagórica.

As expressões trigonométricas cujas entradas são problemas de adição ou subtração podem ser reescritas com as fórmulas da soma e da

diferença.

Você deve eliminar as funções que contêm ângulos duplos usando as fórmulas dos ângulos duplos.

Ainda que o seno só tenha uma fórmula do ângulo duplo, o cosseno tem três versões equivalentes (embora elas tenham aparências diferentes).

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 170

22/05/2014 14:53:00

Capítulo 13

Resolvendo Equações

Trigonométricas

Neste capítulo:

Avaliação de funções trigonométricas inversas

Diferenciação entre soluções exatas, específicas e gerais para equações trigonométricas

Resolução de equações de ângulos únicos e duplos

Determinação de soluções pra equações trigonométricas estranhas elevando ao quadrado e substituindo identidades

Resolver uma equação evoca um sentimento como nenhum outro em mim. Não importa quantos anos eu tenha estudado matemática, e independentemente dos milhares de milhares de problemas que eu já

resolvi, um pensamento sempre surge antes de eu usar o quadrado em uma equação: “Será esta a que vai me frustrar?”

Não importa se você solta um suspiro de alívio a cada vez que resolve uma equação ou não, ou se entra na luta sem medo (como Mel Gibson em *Coração Valente*), as equações são únicas porque, depois que a poeira baixa, é sempre possível verificar sua resposta para ver se está certa. O modo como você celebra uma resposta certa é de sua escolha – escandalosamente (fazendo uma dancinha esquisita, como PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 171

22/05/2014 14:53:00



172 Parte 3: Trigonometria

o Neymar quando comemora um gol”) – ou sutilmente (talvez com uma risada estranha que camufla a emoção subjacente melhor descrita como “Acabei de *destruir* o problema! Sou invencível! Você não é capaz de me segurar, o máximo que você pode querer é tentar me conter!”), é hora de encontrar novamente as equações, desta vez com as expressões trigonométricas colocadas na sua frente.

Funções trigonométricas inversas

Todos nós conhecemos e amamos as funções inversas como o grupo que vai lá e pega as funções que precisamos que sejam eliminadas. Sem a exponenciação e e^x (como você aprendeu no Capítulo 9), você nunca conseguiria livrar a equação $\ln 3x = 5$ daquele logaritmo natural problemático, mantendo o $3x$ preso.

As equações trigonométricas serão cheias de outras expressões presas, como seno e cosseno, então é necessário inverter as expressões trigonométricas para também cancelá-las. O único problema é este: para que uma função tenha uma inversa, ela deve passar pelo teste da reta horizontal, o que nenhuma das funções trigonométricas faz. Todas elas são funções periódicas, lembre-se disso. Então, seus gráficos se repetem sempre, garantindo não somente que cada valor de y no gráfico não seja

exclusivo, como também que, de fato, os valores

Fale a Linguagem

se repitam um número infinito de vezes.

Um **gráfico restrito** é

um pequeno segmento de um gráfico

Felizmente, os matemáticos são pessoas

maior (normalmente periódico) que

espertas e encontraram um jeito de superar esse

passa no teste da reta horizontal e,

obstáculo usando os *gráficos restritos*. Na Figura

assim, tem uma função inversa válida

13.1, destaquei uma pequena seção do gráfico do

seno — o intervalo

— que é conhecido

como o gráfico do seno restrito.

Observe que o gráfico do seno restrito *passa* no teste da reta horizontal, então, contanto que você restrinja o domínio do seno para

, pode definir sua

função inversa (rotulada

ou $\arcsen x$), que então terá um intervalo restrito

de

. Como todas as funções inversas, o domínio da função trigonométrica se torna o intervalo de sua função inversa e vice-versa. Observe que uma função trigonométrica inversa sempre resulta em um valor de ângulo (em vez de um número, como uma função trigonométrica normal).



Capítulo 13: Resolvendo Equações Trigonométricas

173

Figura 13.1

Embora $y = \sin x$

não passe no teste

da reta horizontal, a

porção escurecida em

passa.

Cada função trigonométrica pode ser restrita de modo que tenha uma função inversa. Três delas (seno, cossecante e

tangente) usam o intervalo de

,

ilustrado na Figura 13.1. As outras três

Alerta do Kelley

(cosseno, secante e cotangente) são

Uma função

restritas pelo intervalo $[0, \pi]$. Lembre-se

trigonométrica inversa pode ser

de qual intervalo vai com qual função.

denotada usando no fim de uma

função ou “arc” na frente dela.

Pense nos intervalos restritos das funções

Por exemplo, a inversa da secante

trigonométricas inversas em termos dos

pode ser escrita como

ou

quadrantes que representam. As funções

“arcsec”. Eu prefiro o método do

com intervalos restritos a

arc para escrever inversas (e o

usarei exclusivamente) porque os

resultarão em ângulos somente nos

estudantes interpretam erroneamente

quadrantes I e IV; os intervalos restritos

o como um expoente .

ao intervalo $[0, \pi]$ resultam em ângulos

nos quadrantes I e II.

Exemplo 1: Avalie cada expressão, certificando-se de fornecer respostas no intervalo restrito correto:

a. $\arccos 12$

Essa expressão pergunta: “Qual ângulo tem um valor de cosseno de 1?” De 2

acordo com o círculo unitário, o cosseno tem esse valor em

e

.

Embora talvez você se sinta tentado a fornecer ambas como respostas, lembre-se de que $y = \arccos \theta$ é uma função, então, só pode ter um resultado, não dois. Além do mais, você sabe que o arco cosseno tem um intervalo

22/05/2014 14:53:02



174 Parte 3: Trigonometria

restrito de $[0, \pi]$ (já que o cosseno tem um domínio de $[0, \pi]$). Desse modo, a resposta deve ser

, já que só ela cai no intervalo correto.

b. $\arctg - 3$

3

Alerta do Kelley

Essa expressão pergunta “Qual ângulo tem

Quando lidamos com

um valor de tangente de

3

?” , e é um

arco seno, arco tangente e arco

3

secante, todos os ângulos do quarto

pouco difícil. Você precisa procurar ângulos

quadrante devem ser negativos senão

do círculo unitário dos quais o seno dividido

eles não se enquadram em

.

pelo cosseno seja igual a

3

—

(já que a

3

$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{sen}\theta$

As outras funções trigonométricas

$\cos$.

θ

inversas dão uma saída positiva

Depois de pesquisar um pouco, você descobrirá

(desde que não existam ângulos

que

e

são os únicos ângulos que

negativos em $[0, \pi]$).

estão de acordo com essa descrição:

$\tan$

$\tan$

Observe que você precisa racionalizar a resposta da tangente original de 1

—

para obter 3. No entanto, os ângulos que você obtém são bem

3

— 3

problemáticos, de fato, nenhum é um resultado válido do arco tangente.

A resposta não pode ser

porque ela está no segundo quadrante (e o

arco tangente tem um intervalo restrito aos quadrantes I e IV). Para botar mais lenha na fogueira, apesar de

estar no quarto quadrante, ele é

definitivamente muito grande para caber no intervalo

.

Para remediar isso, você precisa encontrar um ângulo cômico menor subtraindo 2π :

Desse modo, o $\arctan$

. Pode parecer estranho fornecer uma resposta

final que seja um ângulo negativo, mas sua mão é forçada por esses intervalos restritos mal-humorados.

Você Tem Problemas

Problema: Avalie o $\arccos$ — 2.

22/05/2014 14:53:04

Capítulo 13: Resolvendo Equações Trigonométricas 175

Esta é sua resposta final?

As equações trigonométricas são um pouco diferentes das equações com as quais você trabalhou até agora. Como todas elas envolvem funções periódicas, quase todas as funções com as quais você se depara terão um número infinito de respostas.

Para lidar com a magnitude absoluta de respostas que uma equação trigonométrica contém, você será solicitado a expressar suas soluções de uma das formas a seguir:

Forma exata. Uma equação trigonométrica terá exatamente uma resposta para cada função inversa que você usar para resolvê-la; uma resposta na forma exata fornece somente aqueles ângulos de intervalos restritos, nada mais.

Forma específica. Quando um problema solicita que forneça todas as soluções válidas em um intervalo específico – normalmente algo como $[0, 2\pi)$

– ele quer que você ignore toda aquela regra de “Ei cara, só uma resposta é permitida!” e forneça todas as soluções que pode encontrar no intervalo que você recebeu.

Forma geral. Uma resposta na forma geral dá conta do número infinito de ângulos côngruos que correspondem a cada uma de suas soluções.

Praticamente, são todas as soluções no intervalo $[0, 2\pi)$ com $+ 2k\pi$ marcado na extremidade de cada um.

Há outras formas válidas, mas menos comuns, de escrever soluções para equações trigonométricas, como a forma de mímica (na qual você não fala e faz de conta que você e as soluções estão presos em uma caixa grande e invisível) e a forma do clorofórmio (inalar

acidentalmente em um pano com suas respostas faz com que perca a consciência momentaneamente), mas me restringirei às principais no momento.

Exemplo 2: Suponha que tenha resolvido uma equação trigonométrica e terminado com o resultado

. Expresse sua solução para a equação de três modos: a

forma exata, na forma geral e no intervalo $[0, 2\pi)$.

Solução: Comece pela resposta na forma específica, e considere somente as respostas do círculo unitário. Para ter uma tangente de 1, um ângulo precisaria ter os valores do seno e do cosseno iguais (de modo que a fração $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

é reduzida

θ

a 1). Para obter uma tangente de ± 1 , os valores do seno e do cosseno do ângulo precisariam ser opostos. Somente

e

estão de acordo com essa

descrição, então esta é a forma específica da resposta:

, .

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 175

22/05/2014 14:53:05



176 Parte 3: Trigonometria

Depois de saber a solução específica, as outras duas são simples. A solução geral coloca $+ 2 k\pi$ na extremidade de cada resposta:

,

. A solução

exata é

, o único ângulo cômruo de

que cai no intervalo

,

o intervalo restrito do arco tangente. (Desconsidere

porque está localizado

no segundo quadrante. Lembre-se, as respostas exatas do arco tangente estão sempre localizadas nos quadrantes I e IV.)

Você Tem Problemas

Problema 2: Escreva a(s) solução(ões) da equação $y = \arccos 1$ das maneiras a seguir: (a) no intervalo $[0, 2\pi)$, (b) na forma exata e (c) na forma geral.

Equações básicas

Finalmente, é hora de resolver de verdade algumas equações trigonométricas. Acho que você ficará alegremente surpreso ao descobrir que equações trigonométricas simples são resolvidas exatamente como as funções lineares simples. A única diferença é

esta: em vez de isolar o x e então dividir ambos

Alerta do Kelley

os lados por um número para eliminar um

Não entre em pânico

coeficiente, você irá isolar o θ e pegar a inversa

se acabar com algo que não está

da função trigonométrica para eliminá-la.

no círculo unitário. Para avaliar algo

Exemplo 3: Encontre a solução exata para

como

, digite em sua

$$3 \operatorname{cosec} \theta + 5 = 11.$$

calculadora gráfica para obter uma

Solução: Isole o termo trigonométrico

solução exata de $\theta = 1,231$ (certifique—

subtraindo 5 de ambos os lados e então

se de estar no modo de radianos).

dividindo tudo por 3:

$$3 \operatorname{cosec} \theta = 6$$

$$\operatorname{cosec} \theta = 2$$

Se a cosecante de θ é 2, o seno de θ deve ser o recíproco de 2.

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$$

Tome a função do seno inversa (arco seno) de ambos os lados para cancelar o seno: $\arcsen(\operatorname{sen}$

$$\theta) =$$

$$\arcsen \frac{1}{2}$$

$$\theta = \arcsen \frac{1}{2}$$

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 176

22/05/2014 14:53:07



Capítulo 13: Resolvendo Equações Trigonométricas

177

Embora

e

tenham um valor de seno de 1, você está pronto para a

2

solução exata. Jogue o ângulo do segundo quadrante para obter uma resposta final de

.

Você Tem Problemas

Problema 3: Determine a solução geral de

.

Equações Quadráticas

Você já conhece três formas diferentes de resolver equações quadráticas (fatoração, usar a fórmula quadrática ou completar o quadrado), e isso é suficiente – não há necessidade de aprender uma técnica nova só porque você encontrará funções trigonométricas. Seria como aprender um jeito novo de caminhar só porque você estava vestindo uma camiseta com uma cor diferente (embora eu sempre tenha me sentido melhor passeando com uma blusa azul, fugindo com uma branca e troteando com uma verde). Se eu fosse você, iria mais além e usaria somente duas estratégias: fatoração e fórmula quadrática.

A única diferença entre as equações quadráticas com as quais está acostumado

Alerta do Kelley

a lidar e essas que você está prestes

Ao resolver uma equação

a encarar está na etapa final. Em vez

quadrática por meio de fatoração ou

de $x =$, você acabará com uma função

usando a fórmula quadrática, lembre—

trigonométrica, como $\operatorname{tg} \theta =$. Aplique a

se definir a equação como igual a 0

função trigonométrica inversa em ambos

primeiramente.

os lados e está pronto.

Exemplo 4: Determine a solução exata para $4\cos^2 \theta + 11\cos \theta + 6 = 0$.

Solução: Essa é a mesma equação que $4x^2 + 11x + 6 = 0$, exceto que, em vez de x , você tem o $\cos \theta$. De qualquer modo, a equação é fatorável:

$$(4\cos \theta + 3)(\cos \theta + 2) = 0$$

Defina cada fator como igual a zero e resolva:

ou

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 177

22/05/2014 14:53:08



178 Parte 3: Trigonometria

Uma das soluções é inválida. Nenhum ângulo pode ter um cosseno de 2 porque o intervalo

Alerta do Kelley

do cosseno é $[-1, 1]$. Pense sobre os gráficos não

Como as entradas

transformados do seno e do cosseno do Capítulo

válidas de arco seno e arco cosseno

11, eles vão de uma altura mínima de 1 até a

devem estar no intervalo $[-1, 1]$,

altura máxima de 1, então, um valor de cosseno

as entradas de arco secante e arco

de 2 não faz sentido. Desse modo, descarte

tangente devem pertencer a $(-\infty, -1]$

.

ou $[1, \infty)$ quaisquer valores funcionam

para a tangente e a cotangente,

A outra solução,

, definitivamente

então, não é necessário verificá-los.

cai no intervalo $[1, 1]$, mas não está de acordo com

nenhum dos valores do círculo unitário que você

memorizou. Digite isso em sua calculadora para

obter a resposta na forma exata $\theta = 2,419$.

Você Tem Problemas

Problema 4: Liste todas as soluções para $2\sin^3 \theta - \sin^2 \theta = \sin \theta$ no intervalo $[0, 2\pi)$.

Equações Desencontradas e Carentes

Até agora neste capítulo, cada equação que você resolveu tinha somente uma função (como $\sin \theta$ ou $\cos \theta$), mas as equações que estão por vir terão ambas de uma vez. Eu classifico qualquer equação que contém funções desencontradas como “carentes” porque (como uma companheira de alta manutenção ou um amigo com um conjunto inteiro de malas de bagagem emocional), eles precisam de mais atenção que o normal e devem ser manejados com luvas. Por sorte, as identidades pitagóricas são muito úteis.

Equações Carentes com Quadrado

Se uma ou mais funções desencontradas em uma equação for elevada ao quadrado e ambas pertencerem à mesma identidade pitagórica (como a tangente e a secante pertencem ao papai), use a identidade para colocar a equação inteira em termos de uma única função.

Exemplo 5: Encontre a solução exata para

$$5\cos \theta = \sin^2 \theta - 4$$

Alerta do Kelley

A menos que indiquem

Soluções: Esta equação contém o seno e o

que você deve fazer de modo

cosseno (funções diferentes que pertencem

diferente, considere que todos os

à mesma identidade pitagórica, mamãe) e

ângulos em uma equação são

a função do seno é elevada ao quadrado. Se

medidos em radianos.

você massagear a mamãe só um pouquinho

(subtraindo o $\cos^2 \theta$ de ambos os lados dela),

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 178

22/05/2014 14:53:08

Capítulo 13: Resolvendo Equações Trigonométricas 179

acabará com $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$. Isso significa que $\sin^2 \theta$ na equação pode ser substituído por $1 - \cos^2 \theta$:

$$5 \cos \theta = \sin^2 \theta - 4$$

$$5 \cos \theta = (1 - \cos^2 \theta) - 4$$

$$5 \cos \theta = -\cos^2 \theta - 3$$

Excelente, a equação inteira agora está em termos de cosseno e não está mais carente. Você ficou com uma equação quadrática, então, defina-a como igual a 0: $\cos^2 \theta + 5\cos \theta + 3 = 0$

Infelizmente, essa equação não é fatorável. E, então, será necessário

usar a fórmula quadrática. Ela ficará com a mesma aparência que nas equações quadráticas antigas, exceto porque no lugar de $x =$, você escreverá a função ($\cos \theta =$) e aplicará o arco cosseno para terminar: A primeira solução é inválida porque a entrada está fora do intervalo $[-1, 1]$:

$$-5 - 13 \approx -$$

2

4,303. Contudo, o segundo valor está certo, então use sua calculadora para avaliar:

$$(-5 + 13) \approx -$$

$\arccos$ $\arccos$

,

)

2

$$0,697224362268 \quad 2 \quad 342$$

)

$$() \approx$$

Você Tem Problemas

Problema 5: Encontre todas as soluções no intervalo $[0, 2\pi)$ para a equação $2\operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta$.

Equações carentes sem quadrado

Se uma equação tiver funções desconstruídas da mesma identidade pitagórica mas sem quadrados, apresente-as elevando ambos os lados da equação ao quadrado e aplicando a identidade correspondente.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 179

22/05/2014 14:53:09



180 Parte 3: Trigonometria

Exemplo 6: Encontre a solução geral de

$$\operatorname{cosec} \theta = 1 + \cotg \theta.$$

Alerta do Kelley

Ao elevar ao quadrado

Solução: A $\operatorname{cosec} \theta$ e a $\cotg \theta$ são parte do
ambos os lados de uma equação, há
filhinho, mas nenhum é elevado ao quadrado,
grandes chances de que você encontre
então o filhinho é mantido na incubadora até você
soluções falsas, então, verifique suas
elevar ambos os lados ao quadrado. Lembre-se
respostas quando tiver terminado e

de que $(1 + \cotg \theta)^2$ não é igual a $1 + \cotg^2 \theta$, assim elimine as
falsas.

como $(a + b)^2$ não é igual a $a^2 + b^2$, mas, em vez disso, é igual a $a^2 + 2ab + b^2$:

$$(\operatorname{cosec} \theta)^2 = (1 + \cotg \theta)^2$$

$$\operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + 2\cotg \theta + \cotg^2 \theta$$

Observe que o lado direito da equação contém $1 + \cot^2 \theta$, que (de acordo com o filhinho) é igual a $\operatorname{cosec}^2 \theta$:

$$\operatorname{cosec}^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta + 2\cot \theta$$

Subtraia a $\operatorname{cosec}^2 \theta$ de ambos os lados e resolva:

$$0 = 2\cot \theta$$

$$0 = \cot \theta$$

$$\theta = \operatorname{arccot} 0$$

A cotangente é igual a 0 sempre que seu numerador for igual a

, . Contudo,

se você substituir as soluções de volta na equação original, $\operatorname{cosec} \theta = 1 + \cot \theta$, somente

funciona (substituir por θ dá $-1 = 1$). Desse modo, a resposta final na forma geral é

.

Você Tem Problemas

Problema 6: Forneça a solução exata para a equação $\cos \theta + \sin \theta = 1$. (Dica: mova uma das funções para o lado direito da equação antes de elevar ao quadrado.) **Equações com ângulos múltiplos** Se uma ou mais expressões trigonométricas em uma equação contém ângulos múltiplos (como 2θ em vez do velho e conhecido θ), isso afeta um pouco a solução. De fato, o ângulo estranho entra em jogo *depois* de você ter usado a função PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 180

22/05/2014 14:53:11

Capítulo 13: Resolvendo Equações Trigonômétricas 181

trigonométrica inversa no final do problema. Observe como os ajustes são pequenos, conforme demonstro no exemplo a seguir. Direi a você quando é preciso lidar com ângulos múltiplos e mostrarei o que fazer com eles.

Exemplo 7: Forneça todas as soluções para a equação $2\cos^2 3\theta - 1 = 0$ no intervalo $[0, 2\pi)$.

Solução: Esqueça do 3θ no momento, faça de conta que é só um θ , se isso ajudar.

Isole a função trigonométrica adicionando 1 em ambos os lados da equação e dividindo tudo por 2:

Agora extraia a raiz quadrada de ambos os lados, se você racionalizar o lado direito quando estiver pronto lembrará mais um valor familiar do círculo unitário.

Agora é hora de lidar com aquele ângulo 3θ incômodo. Como o coeficiente é 3, você deverá escrever *três vezes mais respostas* do que faria regularmente. Até então, há quatro respostas (cada um dos ângulos do círculo unitário tem um cosseno de 2

2

ou 2

—

), então você deverá acabar com

de respostas totais. Para alcançar

2

isso, acrescente 2π a cada uma de suas soluções por duas vezes em separado: Aham! Isso é uma porção de ângulos amontoados. Caso você ainda esteja se perguntando de onde vieram, explico o que fiz. Ao primeiro ângulo, somei 2π

duas vezes:

e

. Então fiz a mesma coisa com as outras

soluções originais:

e

.

Tudo o que você precisa fazer para terminar esse problema é resolver para θ

multiplicando tudo o que há naquela trezinho de frações por 1, para eliminar o 3

coeficiente de θ :

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 181

22/05/2014 14:53:13

182 Parte 3: Trigonometria

Você Tem Problemas

Problema 7: Forneça a solução geral para $2\cos 2\theta + 1 = 0$

O Mínimo Que Você Precisa Saber

O intervalo restrito das funções arco seno, arco tangente e arco secante é

; o intervalo restrito de arco cosseno, arco tangente e arco cossecante é $[0, \pi]$.

Uma equação trigonométrica tem uma solução exata, uma específica e uma geral.

Você pode usar as identidades pitagóricas para obter uma equação inteira em termos de uma função trigonométrica.

O coeficiente de um ângulo múltiplo diz quantos ângulos congruos deverão ser incluídos como soluções para a equação.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 182

22/05/2014 14:53:14

Capítulo 14

Teoremas do

Triângulo Oblíquo

Neste Capítulo:

Atribuição de ângulos de referência a triângulos oblíquos

Avaliação de funções trigonométricas de ângulos oblíquos

Cálculo das medidas de lados e ângulos de triângulos oblíquos

Determinação da área de um triângulo oblíquo

Se você não conhece o significado da palavra *oblíquo*, o título deste capítulo e cada uma das balas que atirei antes foram como um tapa na cara (ou talvez tenham sido como balas de verdade). Não precisa se preocupar, o termo *oblíquo* significa simplesmente que um ângulo reto não está envolvido. Desse modo, a única coisa que você sabe sobre um ângulo oblíquo é que ele definitivamente não mede 90° e que um triângulo oblíquo não contém um ângulo reto.

Você percebeu que coloquei uma medida em graus? Faz lembrar dos velhos tempos, quando você via um ângulo sem um π ao lado. Alguns dos tópicos deste capítulo terão mesmo um ar retrô, envolvendo graus mais frequentemente que radianos. O

motivo é este: vamos dar aos triângulos um pouco mais de liberdade. Isso significa que você verá muitos ângulos que não estão na posição padrão, e mesmo um conjunto de ângulos que não estão perto do plano cartesiano.

PF_CG_TCIG_Pre-Calculus.indb 183

22/05/2014 14:53:14



184 Parte 3: Trigonometria

Quando eu estava concluindo o ensino fundamental, todas as garotas que eu conhecia tinham um moletom com capuz com uma

Fale a Linguagem

imagem de *spray* na parte de trás. Normalmente

O termo **oblíquo**

havia uma cena de praia com gaivotas, silhuetas descreve algo que não envolve

de pessoas de mãos dadas e estes pensamentos

um ângulo reto. Por exemplo, um

(supostamente) filosóficos escritos em letras

ângulo oblíquo não mede 90° e um

garrafais e robustas: “Se você ama alguém,

triângulo oblíquo não pode ter um

deixe-o livre. Se ele voltar é porque é seu, mas

ângulo reto.

se não voltar, nunca te pertenceu.”

Você agora sabe o suficiente sobre
trigonometria para libertar os ângulos
das posições-padrão, como o moletom tão

sabidamente aconselhava. Como ensinava o tema da série de TV *Barco do Amor*:

“Deixe-o flutuar, ele flutua de volta para você.” Prepare-se para todos os tipos de coisas “excitantes e novas”, como a aplicação de funções trigonométricas a triângulos que não têm um ângulo reto e o cálculo de áreas que era impossível fazer nas aulas de geometria.

Verificação de Referências para

Ângulos Não Amigáveis

Até agora, tudo que mostrei a você sobre trigonometria tem, de algum modo, envolvido ângulos retos. A partir das definições de seno e cosseno (como razões de **SOHCAHTOA**) para os valores do círculo unitário, cada vez que você se virava, via um

Fale a Linguagem

triângulo reto. Contudo, como trigonometria

Um ângulo de

significa “a medida de triângulos”, não

referência é um ângulo agudo

“somente a medida de triângulos retângulos”,

cujo vértice está na origem, com um

você imaginava que esse dia chegaria.

de seus lados no eixo x positivo ou

Para dar o salto de fé nos ângulos e triângulos

negativo de um triângulo retângulo

oblíquos, você usará algo denominado *ângulo*

cujos valores trigonométricos

de referência — um ângulo em um triângulo

equivalem aos de um ângulo em um

retângulo que terá os mesmos valores

triângulo oblíquo.

trigonométricos de um ângulo oblíquo —

então, na verdade, não há muita fé envolvida

na questão.

Contemple o Laço de Gravata

Dado um ângulo cujo lado final está em qualquer quadrante, há um triângulo retângulo exclusivo que gera o ângulo de referência necessário para o ângulo. Ao desenhar todos os quatro triângulos simultaneamente, você obtém algo que se

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 184

22/05/2014 14:53:14

Capítulo 14: Teoremas do Triângulo Oblíquo 185

parece com um laço de gravata (como pode observar na Figura 14.1). Os ângulos de referência verdadeiros que você irá usar são os ângulos agudos que numerei.

Figura 14.1

O laço de gravata é

formado por quatro

triângulos retângulos,

cujos ângulos de

referência são 1, 2, 3 e

4. Ainda assim, você só

utilizará um triângulo de

*cada vez, por exemplo,
qualquer ângulo com
um lado final no terceiro
quadrante usaria o
triângulo destacado com
o ângulo de referência 3.*

Para encontrar um ângulo de referência de um ângulo oblíquo, siga os passos a seguir: 1. Coloque o ângulo oblíquo na posição padrão (se ainda não estiver nessa posição).

2. Desenhe um segmento vertical conectando o lado final ao eixo x , formando $1/4$ do laço de gravata da Figura 14.1.

3. O ângulo agudo (ângulos 1, 2, 3 ou 4 na Figura 14.1) formado pelo lado final e o eixo x terá os mesmos valores trigonométricos do ângulo original, sendo assim um ângulo de referência.

É assim que os ângulos grandes (muito grandes para caberem em um triângulo retângulo) ainda dão um jeito de ter valores trigonométricos para o seno, o cosseno, a tangente e as demais. Seus amigos menores, os agudos (que pertencem a triângulos retângulos válidos) garantem, dizendo coisas do tipo: “Ei, você vai gostar deste cara, ele tem a mesma ética no trabalho, os mesmos princípios morais e os mesmos valores do cosseno que eu tenho. Se você não tiver certeza se deve contratá-lo, eu fornecerei a você referências dele e direi a você que não há nada com o que se preocupar.”

Exemplo 1: Determine a medida do ângulo de referência para cada um dos ângulos a seguir:

a.

Esboce α na posição padrão e desenhe um segmento vertical a partir daí para baixo até o eixo x , conforme demonstrado na Figura 14.2. Isso forma a parte do segundo quadrante do laço de gravata do qual o ângulo agudo, β , é o ângulo de referência para α .

Figura 14.2

Em ângulos do segundo quadrante, como α , o ângulo de referência (β neste diagrama) também é o complemento.

É fácil de calcular β , pois $\alpha + \beta = 180^\circ$. Desse modo, $180^\circ - 139^\circ = 41^\circ$. Não pergunte a si mesmo “Este ângulo está se deslocando no sentido horário ou no sentido anti-horário?”, porque não importa — um ângulo de referência sempre tem um sinal positivo.

Se os valores da função trigonométrica de um ângulo e seu ângulo de referência não são exatamente equivalentes, eles serão diferentes somente por um sinal de negativo (o que significa que os valores são iguais ou opostos). Vamos lidar com isso na próxima seção.

Como Você Fez Isso?

Aqui você encontra atalhos para calcular um ângulo de referência (β) para um ângulo θ

sem ter de desenhar a cada vez. Eu usei radianos, mas o mesmo processo funciona com graus — só substitua π por 180° .

Quadrante I: não é necessário ângulo de referência

Quadrante II: $\beta = \pi - \theta$

Quadrante III: $\beta = \theta - \pi$

Quadrante IV: $\beta = 2\pi - \theta$

Isso só funciona se $0 \leq \theta < 2\pi$. Desse modo, será necessário calcular um ângulo cômplementar para θ se ele não estiver dentro desses limites.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 186

22/05/2014 14:53:15

Capítulo 14: Teoremas do Triângulo Oblíquo 187

b.

Onde você desenha o lado final para θ ? Divida 9 por 7 para obter um coeficiente mais descritivo: $9\pi \approx 1,286$

7

π . Como $\pi = 1,0\pi$ e 3π

$2 = 1,5\pi$ (os limites

para o terceiro quadrante), $1,286\pi$ deve ficar em algum lugar aí. Desenhe o ângulo na posição padrão (não se preocupe em desenhá-lo de modo exato, contanto que você esteja no quadrante certo, é isso que importa) e adicione a linha vertical que conecta seu lado final ao eixo x , como fiz na figura 14.3

Figura 14.3

O ângulo de

referência (β) é a

parte de θ que está no

terceiro quadrante.

O triângulo retângulo desenhado na Figura 14.3 é a parte do terceiro quadrante do laço de gravata e o ângulo de referência, β , é marcado com um arco destacado.

Diferente do problema anterior, desta vez o ângulo de referência é, de fato, uma pequena parte de θ , ou seja, a parte que se estende no terceiro quadrante. Para calcular β , simplesmente subtraia π de θ . Isso remove tudo do ângulo que está contido nos quadrantes I e II, deixando somente o ângulo de referência .

22/05/2014 14:53:16



188 Parte 3: Trigonometria

Você Tem Problemas

Problema 1: Determine o ângulo de referência para

.

Amarrando Funções Trigonométricas

Depois de dominar a arte dos ângulos de referência e de vestir uma gravata com laço, você pode calcular toneladas de valores de funções trigonométricas a mais do que jamais conseguiu. Você pode até conquistar as funções trigonométricas que não estão no círculo unitário, pelo menos em alguns casos selecionados. Verifique o exemplo a seguir para entender o que quero dizer.

Exemplo 2: Se $\operatorname{tg}\theta = 25$ e o $\operatorname{sen} \theta < 0$, avalie o $\cos \theta$.

Solução: Este problema é bem fácil se usar

ângulos e triângulos de referência. De fato,

Ponto Crítico

nem precisa descobrir o que é o θ . Você tem

Voltemos ao Capítulo 11,

o valor da tangente do ângulo (observe que é

onde mostrei a você um plano

positivo, isso é muito importante) e sabe que
cartesiano cujos quadrantes
o valor do seno do ângulo é negativo. Com
foram rotulados com as funções
base nessas informações, você precisa decidir
trigonométricas que eram
qual quadrante contém o ângulo. A tangente
positivas lá (Figura 11.10).
só é positiva nos quadrantes I e III e o seno
Use esse diagrama para ajudá-lo a
é negativo nos quadrantes III e IV. Assim, θ
determinar os quadrantes para esses
deve estar no quadrante III. Então, desenhe
tipos de problemas.
um triângulo retângulo do laço de gravata no
terceiro quadrante com o ângulo de referência
 θ (ilustrado na Figura 14.4).

Figura 14.4

*Como você se move
para a esquerda e
para baixo desde a
origem até o fim da
hipotenusa, ambos,
o lado horizontal e*

o lado vertical do
triângulo, devem
ser marcados como
números negativos.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 188

22/05/2014 14:53:17



Capítulo 14: Teoremas do Triângulo Oblíquo

189

Como você sabe que $\tan \theta = 2/5$ (e que a tangente é igual ao lado oposto dividido pelo lado adjacente), o lado do triângulo oposto a θ deve ter um comprimento de 2 e o lado adjacente deve ter um comprimento de 5. Ainda assim, como você está usando o plano cartesiano, o sentido no qual esses lados se deslocam desde a origem é extremamente importante. Sempre que você se desloca para a esquerda ou para

baixo, esses sentidos devem ser indicados

Alerta do Kelley

por um número negativo; neste

A hipotenusa de um

problema, você se desloca para a

triângulo de referência nunca será

esquerda e para baixo, então, ambos os

negativa. Os únicos lados negativos

números são negativos.

nesses triângulos de referência serão

o lado horizontal (se o triângulo

Como você desenhou um triângulo

estiver nos quadrantes II ou III) e o

retângulo, use o Teorema de Pitágoras

lado vertical (se o triângulo estiver nos

para calcular o lado que está faltando, o

quadrantes III e IV).

qual (como todas as hipotenusas) deve

ser positivo:

Depois de ter os três lados do triângulo indicados, você está finalmente pronto para responder à pergunta que o problema realmente coloca: Qual é o $\cos \theta$? Lembre-se de que o cosseno é igual ao lado adjacente dividido pela hipotenusa, então, substitua os valores da Figura 14.4: lado adjacente

hipotenusa

ou

Você Tem Problemas

Problema 2: Se

e $\cos \alpha < 0$, avalie o $\sin \alpha$.

Obliteração de Triângulos Oblíquos

Lembro de um conselheiro vocacional na faculdade que uma vez me disse: “Você deve procurar um trabalho distante das outras pessoas porque todos nós sabemos como são péssimas as habilidades sociais dos graduados em matemática.” Eu PF_CG_TCIG_Pre-Calculus.indb 189



190 Parte 3: Trigonometria

queria argumentar e defender meus irmãos da matemática, meus camaradas de números complexos, amigos nas frações, companheiros em provas, compatriotas com camisetas tão amassadas que se parecem com um mapa topográfico dos Pirineus. Então me dei conta de uma coisa: ele estava certo. A maioria das pessoas da matemática é introvertida e é raro encontrar pessoas dinâmicas.

Ponto Crítico

Como você descreveria uma hora e meia? A maioria das pessoas (depois de perguntar porque eu estava fazendo uma pergunta tão bizarra) responderia “1,5

horas” ou “1 hora e 30 minutos”. As horas são engraçadas, porque funcionam em um sistema de base 60, o que significa que cada unidade é feita de 60 unidades menores (60 minutos fazem 1 hora e 60 segundos fazem 1 minuto).

Ângulos medidos em graus usam o mesmo sistema de base 60, no qual os minutos são indicados com o símbolo (') e os segundos são indicados por ("). Em outras palavras, $1,5^\circ$ (1 e $\frac{1}{2}$ graus) é igual a $1^\circ 30'$ (1 grau, 30 minutos).

Você não encontrará ângulos escritos em graus e segundos muito frequentemente, mas, caso encontre, é fácil reescrevê-los como decimais. Divida os minutos por 60, divida os segundos por 3.600 = (60²) e some-os aos graus inteiros.

Por exemplo, $47^\circ 52' 17''$ (47 graus, 52 minutos, 17 segundos) tem um decimal equivalente a este:

$47,871^\circ$

Embora os radianos usem frações (o que pode deixá-los feios), são melhores que um sistema de base 60 nada prático que luta com o sistema decimal. Essa é uma das principais razões pelas quais os matemáticos preferem os radianos aos graus, e é por isso que não incluirei medidas em graus, minutos e segundos neste livro.

Uma coisa não se pode contestar: o pessoal da matemática é muito esperto. Com um rápido uso da inteligência e o nascimento dos ângulos de referência, eles abriram uma grande porta para você. Agora, você pode descansar com a certeza de que qualquer ângulo, não somente um ângulo agudo preso dentro de um triângulo retângulo, tem um valor de seno e cosseno (assim como valores para as outras funções trigonométricas).

Embora talvez pareça insignificante, isso na verdade quer dizer que você está livre para deixar o plano cartesiano e as sufocantes restrições da posição padrão.

É hora de lidar com triângulos que circulam livremente e não estão presos a um par de eixos. Para completar, você vai lidar com triângulos oblíquos, então, todos os truques úteis que você aprendeu sobre como calcular os lados e os ângulos dos triângulos retângulos no Capítulo 10 são jogados pela janela. Por sorte, dois teoremas novinhos em folha se apressarão em tomar seus lugares: a Lei dos Cossenos e a Lei dos Senos.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 190

22/05/2014 14:53:18

Capítulo 14: Teoremas do Triângulo Oblíquo 191

A maioria dos triângulos que você encontrará com esses novos teoremas será classificada de uma maneira específica — os ângulos serão classificados por letras maiúsculas (A , B e C) e os lados serão indicados com letras minúsculas (a , b e c). O

problema não está nas maiúsculas e minúsculas, mas a repetição de letras pode confundir. Por que você usaria A e a no mesmo problema? Na verdade, letras combinadas são usadas para indicar algo importante: a letra minúscula representa o lado *oposto* ao ângulo da maiúscula. Por exemplo, o lado b está oposto ao ângulo B no triângulo, e o mesmo acontece com os outros dois pares de letras, resultando em um triângulo que se parece com o da Figura 14.5.

Figura 14.5

Em problemas com

a Lei dos Cossenos e

a Lei dos Senos, os

lados e os ângulos

opostos um ao outro

são frequentemente

classificados com

a mesma letra. A

única diferença é que

os lados aparecem

em minúsculas

e os ângulos em

maiúsculas.

Uma das primeiras decisões que você precisará tomar em problemas com triângulos oblíquos diz respeito a usar a Lei dos Cossenos ou a Lei dos Senos; isso depende do tipo de informações que os recebe sobre o problema. Se os souber o comprimento de cada um dos três lados (abreviado como LLL, para lado-lado-lado) ou dois dos lados se o ângulo estiver incluído entre eles (LAL, lado-ângulo-lado), use a Lei dos Cossenos.

A Lei dos Cossenos

A Lei dos Cossenos é uma fórmula desenvolvida especialmente para cada lado de um triângulo oblíquo. Assim, há três versões da Lei dos Cossenos, uma para cada um de seus três lados:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



192 Parte 3: Trigonometria

As diferenças nas fórmulas não são importantes, pois cada uma diz essencialmente a mesma coisa: o quadrado de um lado é igual aos quadrados dos dois outros lados somados menos o que você obtém ao multiplicar duas vezes os outros dois lados vezes o cosseno do ângulo oposto ao lado com o qual você iniciou.

Exemplo 3: Calcule o maior ângulo no triângulo com lados de tamanho 5, 8 e 10.

Escreva sua resposta em graus.

Solução: Você recebeu o comprimento de cada lado (LLL), então a Lei dos Cossenos deverá ser usada. Não importa qual é a , b ou c , então você deve simplesmente atribuir os valores de modo ordenado: $a = 5$, $b = 8$ e $c = 10$. Você é solicitado a encontrar o maior ângulo, lembre-se que, na geometria, o maior ângulo e o maior lado de um triângulo são sempre opostos um ao outro. Assim, você está tentando calcular o ângulo C , (já que $c = 10$ é o maior lado). A terceira versão da Lei dos Cossenos é a única que contém C , então use e substitua a , b e c na fórmula: Agora estamos diante de uma equação **Ponto Crítico**

trigonométrica básica. Divida ambos os lados

Como os triângulos oblíquos

por -80 e tome o arco cosseno para resolver

não são normalmente

para C . Lembre-se de colocar sua calculadora

desenhados no plano cartesiano,

no modo de graus, conforme indicado pelo

problemas com a Lei dos

problema original.

Cossenos (e a Lei dos Senos)

normalmente são escritos em

11

—

graus em vez de radianos, mas as

$$80 = \cos C$$

fórmulas funcionarão em ambos os

$$-0,1375 = \cos C$$

tipos de ângulos.

$$\arccos(-0,1375) = \arccos(\cos C)$$

$$97,903^\circ \approx C$$

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 192

22/05/2014 14:53:19

Capítulo 14: Teoremas do Triângulo Oblíquo 193

Como Você Fez Isso?

A soma dos três ângulos de qualquer triângulo deve ser igual a 180° . Então, nenhum ângulo dentro de um triângulo pode ter 180° ou mais. Assim, cada ângulo é agudo (se tiver menos de 90°) ou obtuso (se tiver entre 90° e 180°).

Se um ângulo agudo estiver na posição padrão, seu lado final está no quadrante I, mas se for obtuso, fica no quadrante II. Observe que o sinal do cosseno é diferente nesses quadrantes.

No Exemplo 3, o $\cos C = -11$. Como o cosseno de C é negativo, seu lado final deve 80

estar no quadrante II; você já sabe que C é obtuso antes de calculá-lo. Aqui está o ponto principal: o cosseno pode dizer a diferença entre o

ângulo agudo e o obtuso porque os valores de seus cossenos têm sinais diferentes. Isso é extremamente importante, pois o seno não pode considerar esses ângulos separados (o seno é positivo nos quadrantes I e II). Isso torna a Lei dos Senos muito menos útil que a Lei dos Cossenos.

Você Tem Problemas

Problema 3: Determine o comprimento do lado que está faltando no desenho a seguir: **A Lei dos Senos**

Enquanto a Lei dos Cossenos trata de triângulos com LLL e LAL, a Lei dos Senos tem seu próprio nicho: os triângulos AAL, nos quais você recebe a medida de dois ângulos e o comprimento de um lado que não está entre os ângulos. Você também pode usá-lo quando receber um triângulo LLA (os livros-texto normalmente
PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 193

22/05/2014 14:53:19



194 Parte 3: Trigonometria

escrevem o A por último nesta abreviação), em que você recebe dois lados e um ângulo não formado por esses lados. No entanto, a Lei dos Senos nem sempre funcionará nesses casos, então, aplique-a somente se não tiver outra escolha.

Felizmente, a Lei dos Senos é muito mais fácil de lembrar porque sua fórmula é formada por três frações ajustadas como iguais:

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$a = b = c$$

Em outras palavras, o seno de qualquer ângulo dividido por seu lado oposto é igual ao seno de qualquer outro lado dividido por seu lado

oposto. Alguns livros-texto definem a Lei dos Senos como $a \sin A = b \sin B = c \sin C$

$\sin A = \sin B =$

, mas é a mesma coisa. Você

$\sin C$

pode pegar o recíproco de um dos lados da

Ponto Crítico

equação sem criar problemas.

Se for solicitado a você que

Há só uma coisa que você deve manter em

mente ao usar a Lei dos Senos. Diferente da

triângulo no mesmo problema,

Lei dos Cossenos, ao usar a Lei dos Senos, você

comece tentando calcular

não consegue dizer a diferença entre ângulos

o lado e o ângulo maior,

agudos e obtusos, e identificará de maneira

usando a Lei dos Cossenos, se

errada os ângulos obtusos. Então, a moral

necessário. Depois disso, termine o

da história é esta: se você estiver tentando

problema usando a Lei dos Senos,

identificar a medida de um ângulo e houver

identificar a medida de um ângulo e houver

mais simples e curta.

qualquer possibilidade de que o ângulo seja

obtuso, você deve calculá-lo usando a Lei dos

Cossenos em vez da Lei dos Senos.

Exemplo 4: Determine as medidas de A , C e c na imagem a seguir. Suponha que A é um ângulo agudo, então, não precisa ter medo se precisar usar a Lei dos Cossenos.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 194

22/05/2014 14:53:20



Capítulo 14: Teoremas do Triângulo Oblíquo

195

Solução: Há muito a ser feito aí, então, comece identificando as medidas que você conhece. Você tem somente a medida de um ângulo, os ângulos A e C já estão classificados no triângulo, então, o ângulo conhecido deve ser o ângulo $B = 35^\circ$. Você também já conhece os comprimentos dos dois lados: $a = 7$ e $b = 6$. Portanto, você tem os dois lados e um ângulo que não é formado por esses dois lados, um triângulo LLA.

Mas, espere, eu disse a você para não usar a Lei dos Senos em triângulos LLA, a menos que não tenha outra escolha. Infelizmente, não temos AAL (que poderia ser resolvido facilmente com a Lei dos Senos) ou a forma da Lei dos Cossenos (LLL ou LAL). Assim, você precisa usar a Lei dos Senos. Não se preocupe, no fim, tudo dará certo.

Para usar a Lei dos Senos, identifique um par de ângulos/lados cujas medidas você conheça (neste caso, você deve usar $b = 6$ e $B = 35^\circ$). Então, pegue um par de ângulos/

lados sobre os quais você saiba

algo a respeito. Em outras palavras,

Ponto Crítico

escolha $a = 7$ e A porque pelo menos

Embora a Lei dos Senos seja

você conhece o comprimento

definida como três frações

do lado (agora mesmo você está

determinadas como iguais, você

totalmente no escuro em relação a c

usará somente duas frações por

e C , mas isso irá mudar). Substitua a ,

vez. Escolha quaisquer duas das

b , $\text{sen } A$ e $\text{sen } B$ na Lei dos Senos.

três e defina-as como iguais.

$\text{sen } 35^\circ = \text{sen } A^\circ$

6

7

Multiplique ambos os lados da equação por 42 para eliminar as frações, e então resolva para A :

$$7 \text{ sen } 35^\circ = 6 \text{ sen } A^\circ$$

$$7(0,573576436) = \text{sen } A^\circ$$

6

$$0,669172509 = \text{sen } A^\circ$$

$$A = \arcsen(0,669172509) \approx 42,003230743^\circ$$

Não arredonde A ainda! Há muito mais trabalho a fazer, e você não deve arredondar até o fim, para garantir a precisão das outras medidas que estão por vir. Agora que você sabe A e B , pode facilmente descobrir C , já que a soma dos ângulos de um triângulo deve resultar em 180° .

$$35^\circ + 42,003230743^\circ + C = 180^\circ$$

$$C = 102,996769277^\circ$$

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 195

22/05/2014 14:53:21

196 Parte 3: Trigonometria

Tudo o que falta calcular é o lado c , então, use novamente a Lei dos Senos para descobrir:

$$\text{sen } 35^\circ \text{ sen } 102,996769257^\circ$$

6

c

$$c \cdot \text{sen } 35^\circ = 6(\text{sen } 102,996769257^\circ)$$

$$c = 5,84629648544$$

$$\text{sen } 35^\circ$$

$$c \approx 10,192706874$$

Agora que todas as medidas que faltavam estão presentes e indicadas, sinta-se livre para arredondar suas respostas: $A = 42,003^\circ$, $C = 102,997^\circ$ e $c = 10,193$.

Você Tem Problemas

Problema 4: Determine as medidas dos três ângulos no desenho a seguir: 6,5

Como Calcular a Área

de um Triângulo Oblíquo

Se eu vendesse a você um medalhão místico que o protegesse de

lobisomens de olhos azuis que tentassem atacar (e, por algum motivo, você temesse que esse ataque fosse iminente), você consideraria o medalhão muito interessante — até descobrir que 95% dos lobisomens têm olhos castanhos. Algo semelhante ocorre frequentemente na matemática. Você recebe fórmulas matemáticas que funcionam somente em situações muito específicas — e não importa o quanto sejam úteis nessas situações, isso não compensa a falta de utilidade que elas têm em todas as outras circunstâncias.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 196

22/05/2014 14:53:21



Capítulo 14: Teoremas do Triângulo Oblíquo

197

As razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) funcionavam bem quando você estava calculando os lados e os ângulos de triângulos retângulos. É o mesmo que acontece com o mágico emblema **SOHCAHTOA** nos triângulos oblíquos, mas, ainda assim, você será comido vivo pelo primeiro triângulo oblíquo que surgir na sua frente, saído dos arbustos. Depois de aprender as Leis dos Senos e Cossenos, contudo, você pode calcular as partes de qualquer triângulo e caminhar tranquilamente durante a noite, até mesmo em noites de Lua cheia.

A fórmula de longa idade para a área de um triângulo é

, metade da base do

triângulo vezes sua altura. Mais uma vez, a fórmula é fundamentalmente falha: a base e a altura do triângulo têm de

ser perpendiculares uma à outra. A

Ponto Crítico

menos que receba um triângulo

Ambas as novas fórmulas da

retângulo — ou pelo menos um

área funcionam se você estiver

triângulo com uma altura fácil de

medindo ângulos em graus ou

calcular — você está perdido. Até

radianos — não há necessidade

agora, é isso. Você está prestes a

de ajustes.

aprender mais duas técnicas para

calcular a área de um triângulo: uma que funciona se você sabe os comprimentos de dois lados e o ângulo que formam (LAL) e uma que funciona se conhece os comprimentos dos três lados (LLL).

Triângulos LAL

Se um triângulo tem lados a e b que formam um ângulo C , a área desse triângulo é esta:

$$A = ab$$

$$1 \triangleright \sin C$$

$$2$$

Parece um pouco com a velha fórmula da “meia base vezes a altura”, exceto porque a e b não têm de ser lados específicos do triângulo. Tudo o que eles precisam fazer é formar o ângulo C .

Exemplo 5: Determine a área do triângulo a seguir:



198 Parte 3: Trigonometria

Solução: Para aplicar a nova fórmula $A = \frac{1}{2} ab \sin C$, você precisa saber a medida

2

do ângulo formado pelos lados com comprimentos 9 e 12. O ângulo que você substitui na fórmula tem de ser formado pelos lados que você substitui. Subtraia os outros ângulos no triângulo de 180° para descobrir qual é o ângulo restante: $180^\circ - 38^\circ - 30^\circ = 112^\circ$.

Agora, substitua tudo na fórmula:

Área =

$\frac{1}{2} ab \cdot \sin C$

2

$= \frac{1}{2} (9)(12) \cdot \sin 112$

1

°

2

$= 54 (0,92748385)$

$= 50,068$

Você Tem Problemas

Problema 5: Dois lados de um triângulo têm comprimentos 4 e 7 e o ângulo que eles formam mede 40° . Qual é a área do triângulo?

Triângulos LLL

Mesmo que você não receba a medida de nenhum ângulo em um triângulo, pode calcular sua área se souber os comprimentos dos três

lados. De acordo com a *Fórmula da Área de Heron*, um triângulo com os lados a , b e c tem área: $A = s(s - a)(s - b)(s - c)$ se .

Exemplo 6: O triângulo ABC tem lados que medem 5 cm, 9 cm e 12 cm. Calcule sua área e defina sua resposta usando a unidade de medida adequada.

Solução: Comece calculando s :

Fale a Linguagem

A Fórmula da Área

de Heron afirma que um triângulo

Como não há ângulos opostos com os quais se

oblíquo com lados a , b e c tem área

preocupar, não importa qual lado você nomeia

se

como a , b ou c ; você obterá a mesma resposta

.

pela Fórmula da Área de Heron:

área

,

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 198

22/05/2014 14:53:24

Capítulo 14: Teoremas do Triângulo Oblíquo 199

Você deve definir sua resposta como centímetros quadrados (cm²) porque a unidade de medida de área correta é o quadrado da unidade usada para medir os lados da figura.

Você Tem Problemas

Problema 6: Calcule a área de um triângulo cujos lados têm 9, 13 e 16 centímetros de comprimento.

O Mínimo que Você Precisa Saber

Os ângulos de referência são ângulos agudos de triângulos retângulos com os mesmos valores trigonométricos (mas, possivelmente, sinais diferentes) dos ângulos oblíquos.

Há quatro triângulos de referência diferentes, cada um com seu próprio ângulo de referência e cada um correspondente a um quadrante do plano cartesiano.

A Lei dos Cossenos e a Lei dos Senos são usadas para calcular os ângulos e lados dos triângulos oblíquos.

Somente a Lei dos Cossenos pode determinar com precisão a medida de um ângulo obtuso.

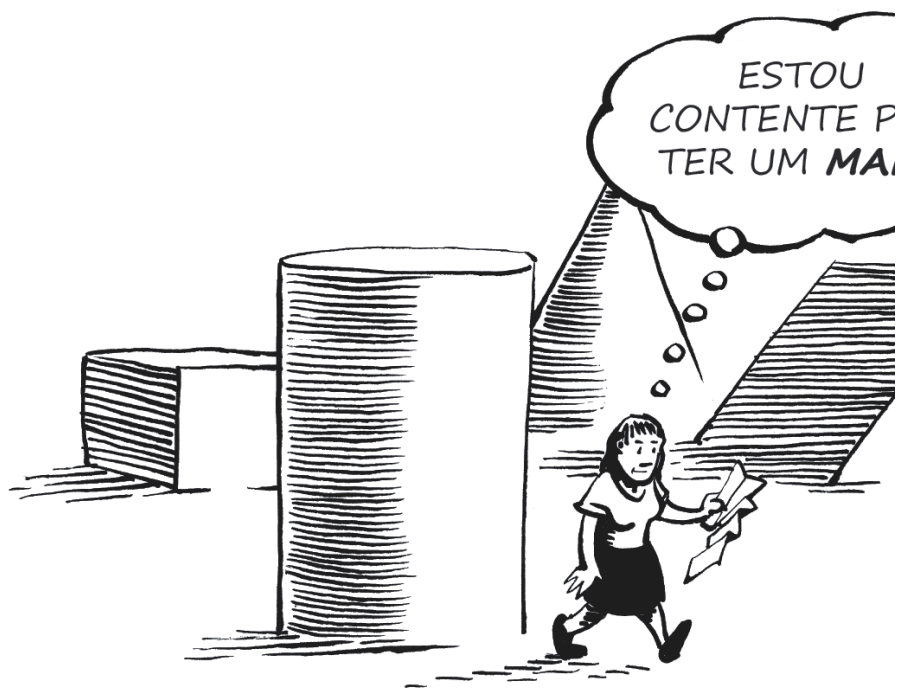
Você pode calcular facilmente as áreas de triângulos oblíquos LAL e LLL.

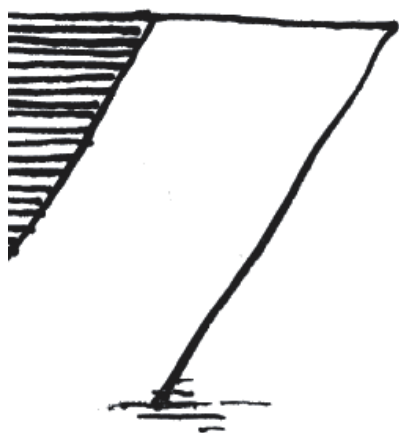
PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 199

22/05/2014 14:53:24

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 200

22/05/2014 14:53:24





Nesta parte, você dará mais um passeio pela terra das formas que conheceu há muito tempo (e de algumas que nunca foram mencionadas no jardim de infância comum, a menos que você tenha ido para um daqueles legais, onde as crianças fazem yoga e dança expressionista). Ainda assim, por mais nostálgico que possa ser trabalhar com coisas como circunferências e formas ovais, o pré-cálculo está (é claro) chegando com toneladas de variáveis e fórmulas para acabar com a diversão.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 201

22/05/2014 14:53:25

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 202

22/05/2014 14:53:25

Capítulo 15

Parábolas e Circunferências

Neste Capítulo:

Definição de seções cônicas

Forma geral e padrão de uma cônica

Identificação do vértice, do foco, da diretriz e do eixo de simetria de uma parábola

Identificação do centro e do raio de uma circunferência

Representação gráfica de parábolas e circunferências no plano cartesiano As equações quadráticas são notícias ultrapassadas. Você já sabe como resolvê-

las (usando a fórmula quadrática, completando o quadrado ou

fatorando) e até já desenhou alguns de seus gráficos (indicando pontos ou usando transformações de gráficos). Ainda assim, mal começamos a arranhar a superfície dos gráficos de quadráticas (denominadas *parábolas*). Não tenha medo – quando este capítulo tiver terminado, a superfície terá sido bem arranhada. Surpreendentemente, há uma tonelada de coisas a serem aprendidas sobre parábolas, embora possa parecer estranho dar tão duro para compreender gráficos que você já estava esboçando lá no Capítulo 6.

Quando já tivermos dominado a arte da culinária com equações quadráticas, será hora de aumentar as apostas e jogar duas equações quadráticas na *mesma* equação. Isso parece um pouco complicado, mas seu gráfico (uma circunferência) não poderia ser mais simples.

PF_CG_TCIG_Pre-Calculus.indb 203

22/05/2014 14:53:25



204 Parte 4: Seções Cônicas

Essas duas formas, aparentemente sem relação, não são agrupadas no mesmo capítulo por mera coincidência, elas são dois de um total de quatro gráficos que, juntos, formam algo denominado *seções cônicas* (discuto os outros dois gráficos no Capítulo 16).

Introdução a Seções Cônicas

As *seções cônicas* são um grupo de quatro formas geométricas: parábolas (os gráficos em forma de u das equações quadráticas), circunferências, elipses (formas ovais) e hipérboles (sobre as quais você talvez nunca tenha ouvido falar na vida, mas que parecem um pouco com duas parábolas juntas). São denominadas seções cônicas porque você pode gerar suas formas cortando um cone circular reto.

Poucas pessoas têm experiência em cones (a

Fale a Linguagem

não ser aqueles que constroem estradas ou

As seções

trabalham vendendo sorvetes de casquinha),

cônicas consistem em quatro

então consulte a Figura 15.1 para visualizar o que

formas geométricas (parábolas,

estou dizendo. Um cone circular reto não é nada

circunferências, elipses e hipérboles)

além de um cilindro que fica cada vez mais fino e,

que são, de fato, as seções cruzadas de

por fim, fecha em um ponto. É denominado cone

um cone circular reto decomposto por

“reto” porque fica reto para cima ou para baixo

um plano.

em vez de pender para um lado.

Figura 15.1

Cortar em paralelo

à base do cone

resulta em uma

circunferência, mas

se você corta-o em

ângulo, acaba com

cone

círculo

elipse

uma elipse.

circular

reto

Imagine usar uma faca afiada para cortar o cone à esquerda da Figura 15.1. Se você cortar reto, cruzando o meio, movendo a lâmina exatamente paralela à base do cone, você acaba com uma seção transversal perfeitamente circular. Ainda assim, cortar em ângulo resulta em uma seção transversal que é elíptica. (Para obter parábolas e hipérbolas, corte um lado do cone em vez de cortar pelo meio.)

PF_CG_TCIG_Pre-Calculus.indb 204

22/05/2014 14:53:26



Capítulo 15: Parábolas e Círculos

205

Por mais engraçado que seja imaginar cortar coisas matemáticas com uma faca gigante, essa aparência de maníaco em seu olhar está me assustando. Então,

Alerta do Kelley

voltarei ao lado menos perigoso, menos

As seções cônicas muito

afiado, menos “Ei, fico me perguntando

avancadas escritas na forma geral
como *sua* seção transversal ficará” e à
também contêm um termo xy , que
parte dessas coisas, de volta ao mundo
indica que seu gráfico é girado no
protegido e bobo das equações.

plano cartesiano. Ainda assim, você

Todas as seções cônicas podem ser
não deverá ver nenhum desses nas
escritas na *forma geral*, que tem esta
aulas de pré-cálculo, então, não os

aparência: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$.

discutirei aqui.

Observe que as cônicas podem conter até

duas variáveis diferentes ao quadrado (o

que é novo) e a forma geral requer que

tudo seja definido como igual a 0 (o que não é novidade).

Embora você não saiba muito sobre como as seções cônicas
individuais funcionam até agora, você ainda assim consegue
diferenciá-las. Para classificar uma seção cônica na forma geral $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, observe o(s) coeficiente(s) do termo ou
dos termos ao quadrado (A e B). Se A ou $B = 0$ (em outras palavras,
só há um termo ao quadrado na equação), você tem uma parábola em
mãos. Entretanto, se A e B

forem números diferentes de zero, uma das três possibilidades a seguir
é verdadeira:

Se $A = B$, é uma circunferência.

Se $A \neq B$, mas A e B têm o mesmo sinal, é uma elipse.

Se $A \neq B$, e A e B têm sinais diferentes, você tem uma hipérbole.

Depois de classificar as cônicas, você está preparado para executar duas tarefas importantes, que se espera que você faça com todas as seções cônicas: reescrever equações na forma padrão e representá-las graficamente.

Exemplo 1: Identifique a seção cônica representada por cada uma das equações a seguir na forma geral.

a.

Solução: Os coeficientes de x^2 e y^2 são iguais – ambos são 3; então, essa é a equação de uma circunferência.

b.

Solução: Desta vez, o coeficiente de x^2 (2) não é igual ao coeficiente de y^2

(1), então, não é uma circunferência. Entretanto, ambos os coeficientes são positivos, então, deve ser uma elipse.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 205

22/05/2014 14:53:26



206 Parte 4: Seções Cônicas

c.

Solução: Os coeficientes de x^2 e y^2 (5 e -5 , respectivamente) são desiguais e têm sinais diferentes. Desse modo, essa deve ser a equação de uma hipérbole.

Você Tem Problemas

Problema 1: Identifique a seção cônica representada por cada uma das equações a seguir na forma geral:

a. $3x^2 - y^2 + 7x - 7y - 2 = 0$

b. $5y^2 + x - 2y = 0$

Exterminando Parábolas

No Capítulo 6 (na seção “Transformações de Funções”), você aprendeu como representar graficamente uma função como $f(x) = 2(x + 1)^2 - 3$. É só o gráfico de $y =$

x^2 movido uma unidade à esquerda e três unidades para baixo e esticado um pouco verticalmente. (Bons tempos de inocência aqueles, não acha? Tantas memórias boas.) O que você não sabia naquela época é que você estava, na verdade, lidando com a forma padrão de uma equação quadrática, cujo gráfico é uma parábola.

Antes de começarmos, deixe-me fornecer uma definição matemática mais modernosa de parábola. Uma *parábola* é o conjunto de pontos que são equidistantes (têm mesma distância) de um ponto (denominado *foco*) e uma linha (denominada *diretriz*).

Imagine esta cena: uma estrada reta passa

perto de sua casa e, a uma distância de mais ou

menos 9 metros dessa estrada, você tem uma

Fale a Linguagem

árvore alta em seu quintal. Se você e todos os

Uma **parábola** é

seus amigos que gostam de árvores, estradas,

o conjunto de pontos no plano

parábolas e ilustrações matemáticas estranhas

cartesiano que são equidistantes de

se reunissem no mesmo lado da estrada que a

um ponto fixo (denominado **foco**) e árvore, e cada pessoa ficasse à mesma distância uma linha fixa (denominada **diretriz**). da árvore e da estrada, o seu grupo formaria um gráfico de parábola. (Se você tiver dificuldade para visualizar isso, verifique a Figura 15.2, a árvore é o foco e a estrada é a diretriz).

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 206

22/05/2014 14:53:27

Capítulo 15: Parábolas e Círculos

207

Você verá dois tipos de parábolas diferentes em pré-cálculo, dependendo de qual dos termos ao quadrado (x^2 ou y^2) está faltando na forma geral. Lembre-se de que a equação de uma parábola terá um termo x^2 ou um termo y^2 , mas não ambos. Se uma parábola tiver um termo x^2 , seu gráfico apontará para cima ou para baixo e a parábola contendo o termo y^2 apontará para a esquerda ou direita.

Quadráticas Contendo um Termo x^2

Se uma parábola tiver um termo x^2 , tem esta aparência na forma padrão: $y = a(x - h)^2 + k$, onde Espere um minuto, acho que escutei as batidas de seu coração três vezes mais fortes que o normal. Eu sei que essa equação tem uma aparência realmente bizarra, mas faz mais sentido se você olhar para ela nos termos de seu gráfico, exibido na Figura 15.2.

Figura 15.2

Todos os valores

eixo de simetria

marcados nesta parábola

são definidos se a

parábola aponta para

cima. Se ela aponta para

foco

baixo, o foco será $(h, k - c)$

e a diretriz será $y = k + c$.

vértice

diretriz

Vamos passar pelas partes mais importantes da parábola, então, você poderá ver o que todas as variáveis a , c , h e k significam e de onde vêm:

O *vértice* da parábola – seu ponto mais baixo no gráfico aponta para cima e seu ponto mais alto no gráfico aponta para baixo – está localizado no ponto (h, k) .

O *eixo de simetria* é uma linha vertical que passa pelo vértice, então, ele tem a equação $x = h$. Ele corta o gráfico em duas metades iguais que parecem reflexos uma da outra na linha; tecnicamente, isso significa que a parábola é simétrica sobre esse eixo, de onde vem o nome.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 207

22/05/2014 14:53:27





208 Parte 4: Seções Cônicas

Todos os pontos na parábola têm a mesma distância do foco e da diretriz, mas como o vértice está no eixo de simetria, é mais fácil de calcular. A distância do vértice para cada um desses marcos é denominada c .

Quando a parábola aponta para cima, seu foco está acima do vértice, no ponto $(h, k + c)$.

Fale a Linguagem

Observe que o valor de x , h , é o mesmo.

O eixo de simetria

Ambos estão localizados no eixo de simetria,

é uma linha que corta o meio da

$x = h$. Se a parábola aponta para baixo, o foco

parábola, passando somente por

tem as coordenadas $(h, k - c)$.

um ponto, denominado **vértice**. A

A diretriz está sempre localizada no lado do distância do vértice em relação ao foco

vértice oposto ao foco, uma linha horizontal

e à diretriz (medida ao longo do eixo

exatamente c unidades abaixo de uma

de simetria) é o valor c na equação na

parábola que aponta para cima ($y = k - c$) ou $c \geq 1$

forma padrão $a = \pm$

(4) c .

unidades acima de uma parábola que aponta

para baixo ($y = k + c$).

Para converter uma parábola da forma geral para a forma padrão, é necessário completar o quadrado. Se você não conseguir lembrar de como isso funciona, volte ao Capítulo 7 e revise antes de experimentar o exemplo a seguir. (Esse quadrado binomial problemático, $(x - h)^2$, torna necessário completar o quadrado.) Se você *odeia* muito completar o quadrado, tenho más notícias. Todas as seções cônicas contêm pelo menos um quadrado binomial. De fato, as outras três cônicas com as quais você já trabalhou têm *dois* quadrados binomiais cada uma, então terá de concluir o quadrado *duas vezes* em cada um desses problemas para alcançar a forma padrão. Se isso realmente deixa você apavorado, lembre-se de que as coisas sempre podem ficar piores. E se sua camiseta pegasse fogo enquanto você estivesse tentando colocar uma parábola na forma padrão? Seria *muito* pior.

Exemplo 2: Escreva as equações da parábola na

Ponto Crítico

forma padrão e represente-as graficamente:

Se o foco de uma parábola for

a. Parábola com foco $(-2, 4)$ e diretriz $y = 5$

mais alto que a diretriz no plano

cartesiano, a parábola deve

Solução: O eixo de simetria passa pelo

apontar para cima (em direção
foco e pelo vértice, então, seus valores de
ao foco e para longe da diretriz).
 x devem combinar. Desse modo, a equação
Por outro lado, se a diretriz
desse eixo deve ser $x = -2$, e a coordenada
estiver acima do foco, a parábola
 x do vértice (h) também é -2 . Observe
deve apontar para baixo.

também que o foco está abaixo da diretriz,
então a parábola aponta para baixo.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 208

22/05/2014 14:53:28



Capítulo 15: Parábolas e Círculos

209

Para calcular c , encontre o comprimento do segmento vertical que conecta o foco e a diretriz (subtraia as alturas um do outro e tome o valor absoluto), então divida esse número por 2. Neste problema, a altura do foco é 4 e a altura da diretriz é 5. Assim, eles são $|4 - 5| = 1$ unidades separadas e .

Conte c unidades do foco em direção à diretriz – neste caso, você conta 1 unidade para cima desde $(-2,4)$ para atingir o vértice: 2

.

Neste ponto, você sabe que $h = -2$ e

, mas você não sabe qual é o valor de

a. Felizmente, você sabe que

, como você acabou de descobrir que

, substitua-o na fórmula:

Cuidado! Na verdade, você não

terminou de calcular a ; você

conhece seu valor, mas não sabe

Alerta do Kelley

qual é seu sinal. Se o gráfico

A constante c sempre

estiver apontando para cima, a

será positiva, então, a fórmula

deve ser positivo, mas se estiver

apontando para baixo, a deve ser

$a = 1$ não pode dizer se a deve ser

$4c$

negativo. Como mencionei antes,

positivo ou negativo. O sinal de a

essa parábola aponta para baixo,

depende da direção para a qual a

então

parábola está voltada.

Substitua a , h e k pela forma

padrão e você obterá a equação

da parábola:

A Figura 15.3 mostra o gráfico dessa parábola. É o gráfico de $y = x^2$ com algumas transformações: reflita-o sobre o eixo x , nivele-o um pouco para que cada altura seja

, tão alta como no começo, finalmente, mova-o para a esquerda 2 unidades e para cima 9 unidades.

2

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 209

22/05/2014 14:53:30



Embora você

diretriz

possa usar

transformações

para representar

graficamente

,

foco

é igualmente fácil

desenhar o gráfico

indicando pontos.

Ponto Crítico

b. Parábola com a equação

Uma equação de parábola

Para forçar essa equação a ficar na

resolvida para y não é

forma padrão, você precisa completar o

completamente inútil. A

quadrado. Comece movendo a constante

constante também é o

para o lado oposto da equação:

interceptor y do gráfico.

Não esqueça que o coeficiente de x^2

deve ser igual a 1, então não adiantará

completar o quadrado. Em vez de dividir tudo por 2, fatore o coeficiente de ambos os termos no lado esquerdo (é daí que vem o termo a na forma padrão).

Alerta do Kelley

Tome cuidado ao completar o quadrado para um número entre parênteses – como no Exemplo 2b. Se você somar algo metade de 6 é igual a 3), e eleve-o dentro desses parênteses, precisa ao quadrado (32) para obter 9. Isso somar esse número *multiplicado* significa que você deve somar 9 dentro pela constante externa do *outro* dos parênteses, logo depois do $6x$. lado da equação.

Para manter a equação equilibrada, é necessário somar o mesmo valor também no lado esquerdo, mas tome cuidado!

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 210

22/05/2014 14:53:31

Capítulo 15: Parábolas e Círculos

Embora pareça que você somou 9 no lado direito da equação, na verdade você somou 9 dentro de um grupo de parênteses multiplicado por 2. Em outras palavras, na verdade você somou $9 \cdot 2 = 18$ no lado direito, então, deve somar isso no lado esquerdo também: Simplifique o lado esquerdo da equação e fatore o lado direito: Resolva para y (adicionando 4 aos dois lados) e a parábola está na forma padrão: Compare isso à forma padrão cheia de variáveis de uma parábola, $y = a(x - h)^2 + k$ para ver que $a = 2$ (que é positivo, então, a parábola está voltada para cima), $h = -3$ (h é sempre o *oposto* da constante entre parênteses) e $k = 4$. Gere o gráfico na Figura 15.4 marcando os pontos ou aplicando transformações.

Figura 15.4

O gráfico apontando

para cima de

$$y = 2(x + 3)^2 + 4 \text{ tem o}$$

vértice $(-3, 4)$.

Você Tem Problemas

Problema 2: Identifique o foco e o vértice da parábola com a equação

.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 211

22/05/2014 14:53:32

212 Parte 4: Seções Cônicas

Quadráticas Contendo um Termo y^2

Enquanto circunferências, elipses e hipérboles sempre devem conter um termo x^2 e um termo y^2 , as parábolas podem conter um ou outro. Até agora, todas as palavras que passei para você têm sido variações de x^2 , então é hora de examinar variações de y^2 . Embora não tenham muito em comum, aqui estão duas diferenças fundamentais: 1. **Em vez de apontar para cima ou para baixo (como parábolas x^2), parábolas y^2 apontam para a direita ou esquerda.** Você ainda pode dizer para qual direção está apontando olhando o sinal de a . Se a for positivo, a parábola está apontando para

a direita, um a negativo indica uma parábola apontando para a esquerda.

2. Elas não são funções. Todas as parábolas y^2 (como a exibida na Figura 15.5) falham no teste da linha vertical porque quase todos os pontos na parábola têm um ponto irmão com o mesmo valor de x . Em outras palavras, muitos dos valores de x têm *dois* valores de y combinados; para essas entradas de x , há duas saídas, e isso quebra as regras que uma função deve obedecer.

Embora essas sejam diferenças significativas, suas formas padrão são notadamente similares. A forma padrão de uma parábola que contém um termo y^2 tem esta aparência: $x = a(y - k)^2 + h$, se ; seu gráfico se parecerá com a Figura 15.5.

Figura 15.5

diretriz

O gráfico de uma

parábola contendo

um y^2 se parece

foco

muito com o gráfico

de uma parábola

x^2 girado 90° no

sentido horário.

eixo de simetria

vértice

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 212

22/05/2014 14:53:32



Capítulo 15: Parábolas e Círculos

213

Dedique um tempo para conhecer o gráfico da Figura 15.5 e investigar as características importantes da parábola agora horizontal:

A equação é resolvida para x em vez de y e o binômio quadrado agora abriga o termo y .

O vértice é ainda (h, k) , embora o h e o k apareçam em diferentes locais na forma padrão.

Embora c ainda represente a distância do vértice ao foco e ao eixo de simetria, é agora uma distância horizontal em vez de vertical.

Falando em horizontal, o eixo de simetria também vai para leste e oeste e não só ao norte e sul, desse modo, sua equação agora começa com $y =$ em vez de $x =$.

A orientação da diretriz mudou, ela agora é uma linha vertical, com uma equação que começa com $x =$.

O mais importante a ser lembrado é que c agora é uma distância horizontal, o que significa que você se moverá à esquerda e à direita a partir do vértice se estiver tentando alcançar o foco e a diretriz. Desse modo, é necessário somar ou subtrair c de h (em vez de k).

Ponto Crítico

Você já ouviu falar em um “microfone parabólico”? Entre outras coisas, ele é comumente usado para capturar sons em campo ao longo das linhas secundárias em um jogo de futebol americano. As antenas parabólicas e os refletores de luz têm uma seção transversal parabólica também, pelo mesmo motivo: sons, raios luminosos e ondas de satélites que atingem uma superfície parabólica refletem de volta em um ponto, o foco da parábola, que concentra e intensifica o sinal a ser recebido e, desse modo, melhora sua qualidade.

Exemplo 3: Imagine que uma parábola com um eixo de simetria horizontal tem vértice $(4, -2)$ e interceptor y em $(0, 3)$. Escreva a equação da parábola na forma padrão, identifique seu foco e sua diretriz e represente graficamente.

Solução: Se o vértice da parábola é $(4, -2)$, então $h = 4$ e $k = -2$. Essas informações são incríveis, pois quando esses valores são substituídos na forma padrão de uma parábola com um eixo de simetria horizontal, a única constante desconhecida que resta é a :
PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 213

22/05/2014 14:53:33



214 Parte 4: Seções Cônicas

Agora substitua na coordenada do interceptor y ($x = 0, y = 3$) e resolva para a : Então, a equação da parábola na forma padrão é

. Use a fórmula

para calcular c (ignore o sinal de a ; c é sempre positivo): Assim, você precisa se deslocar 25 unidades do vértice para alcançar o foco ou a

diretriz. Lembre-se de que o sinal de a indica o caminho para o qual a

parábola está voltada e, assim, de qual direção se parte para ir do vértice para alcançar o foco.

Neste problema, a é negativo, então a parábola deve estar voltada para a esquerda.

Subtraia 25 da coordenada x do vértice para calcular o foco: 16

()

25

64 25

4 –

–

16 , -2 = ()

16 16 , -2

foco = (3916)

, -2

Ponto Crítico

Para determinar a equação da diretriz, some 25

16

Você sempre pode representar

ao valor de x do vértice. (Lembre-se de que a

uma parábola graficamente

indicando alguns pontos.

diretriz de uma parábola que aponta na direção

Substitua alguns valores de

horizontal deve ser uma linha vertical e terá a

y em

4

$x = -$

$(y + 2)^2 + 4$

equação $x = .$)

25

(preferencialmente, os valores

de y próximos ao valor de y do

vértice de -2), e calcule os valores

diretriz

de x correspondentes para obter os

pontos no gráfico.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 214

22/05/2014 14:53:35

Capítulo 15: Parábolas e Círculos

215

O modo mais fácil de representar graficamente a parábola é indicar o vértice e o interceptor de y , como fiz na Figura 15.6. Como cada ponto na parábola deve ter um ponto correspondente refletido no eixo de simetria, o ponto $(0, -7)$ também pertence ao gráfico (assim como o interceptor y $(0, 3)$, fica no eixo y e está a 5 unidades verticais de distância do eixo de simetria). Use esses três pontos para obter uma boa ideia da forma do gráfico.

Figura 15.6

Você não precisa

desenhar o foco e a

diretriz ao representar

uma parábola

diretriz graficamente,
como fiz aqui
para o gráfico de ,
foco
mas quis fazer isso.
Quando começo
a representar
graficamente, nada
me faz parar.

Você Tem Problemas

Problema 3: Coloque a equação da parábola $x = y^2 - 6y + 8$ na forma padrão; calcule o vértice, o foco e a diretriz e desenhe o gráfico.

A Circunferência Viciosa

Acredite ou não, esse breve curso rápido que você acabou de fazer sobre parábolas é uma ótima preparação para o resto das seções cônicas. Há somente duas habilidades difíceis de serem dominadas para lidar com as cônicas: memorizar as formas padrão de cada uma e completar o quadrado sem chorar. Quando você conseguir fazer ambas, as seções cônicas serão como brisa. Se você ainda não souber como, não se preocupe. Elas não se tornarão somente mais fáceis com a prática; acredito que você achará as páginas deste livro surpreendentemente absorventes, de modo que suas lágrimas cairão sobre elas e borrarão a tinta só um pouquinho.

PF_CG_TCIG_Pre-Calculus.indb 215

22/05/2014 14:53:35



Finalmente, temos boas notícias. As *circunferências* são muito, muito, muito, muito mais fáceis de compreender que as parábolas, por várias razões:

Há somente duas características muito importantes em uma circunferência, o *centro*

Fale a Linguagem

e o *raio*, em oposição ao maior número de

Uma **circunferência**

características de uma parábola (vértice,

é um conjunto de pontos no plano

foco, diretriz, eixo de simetria).

cartesiano, os quais têm a mesma

Uma circunferência tem somente uma forma

distância (chamada **raio**) de um ponto

padrão, diferentemente das duas formas

fixo (denominado **centro**).

padrão de uma parábola.

É incrivelmente simples representar

circunferências graficamente – mais fácil

até que retas. De fato, a única coisa mais

fácil de representar graficamente que uma

circunferência é um único ponto.

Eu sei que você está pensando para descobrir, então, aqui está a equação para a forma padrão de uma circunferência:

Ao representar isso graficamente, você acaba com algo semelhante ao que vê na Figura 15.7. Observe que (h, k) representa novamente um ponto importante, como no caso das parábolas, mas, em vez de um vértice, agora ele representa o centro da circunferência. Você provavelmente já descobriu isso, mas direi da mesma forma. A variável r representa o raio da circunferência.

Figura 15.7

O gráfico de uma

circunferência na

forma padrão

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2,$$

onde (h, k) é o centro

e r é o raio.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 216

22/05/2014 14:53:36



Capítulo 15: Parábolas e Círculos

217

Exemplo 4: Coloque a equação da circunferência $4x^2 + 4y^2 - 8x$

+ $12y - 23 = 0$ na forma padrão, identifique seu centro e raio e represente graficamente.

Solução: Esteja certo de que isso é uma circunferência porque seus coeficientes de x^2 e y^2 se combinam. Dito isso, siga em frente e divida *tudo* por 4 para cancelar os coeficientes, de modo que possa completar o quadrado para x e y : Como você vai completar o quadrado duas vezes, talvez ajude visualizar o lado esquerdo como dois grupos diferentes, um contendo as variáveis x e outro contendo as variáveis y . Mova a constante através do sinal de igualdade também, adicionando-a aos dois lados. Agora, complete o quadrado dos termos x (somando 1 no conjunto mais à esquerda dos parênteses) e para os termos y (somando 9 dentro dos outros parênteses). Não 4

esqueça de manter a equação equilibrada adicionando esses valores ao lado direito da equação também:

Fatore os trinômios e adicione aquela sequência feia de constantes ao lado direito; você acabará na forma padrão:

Nesta equação, $h = 1$ e

(os opostos

dos números entre parênteses), então o

centro da circunferência é $(1, 3)$

, -

()

Alerta do Kelley

2 . Você

Não esqueça que a

também sabe que $r^2 = 9$, então o raio do

forma padrão de uma circunferência

contém o raio elevado ao quadrado.

circunferência é 3

Você precisa tomar a raiz quadrada

Para representar graficamente a
da constante sozinha do lado
circunferência, indique o centro e, então,
direito da equação para descobrir
conte 3 unidades (o comprimento do
qual é o raio.

raio) para cima, para baixo, à direita
e à esquerda do centro, marcando
cada ponto. Finalmente, desenhe uma

circunferência passando por esses quatro pontos. Você acaba na Figura
15.8.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 217

22/05/2014 14:53:37

218 Parte 4: Seções Cônicas

Figura 15.8

O gráfico de

,

o circunferência que

tinha a aparência de $4x^2$

$$+ 4y^2 - 8x + 12y - 23 = 0$$

na forma geral.

Você Tem Problemas

Problema 4: Coloque a equação da circunferência $x^2 + y^2 + 6x - 10$

$y + 30 = 0$ na forma padrão, identifique seu centro e raio e represente graficamente.

O Mínimo que Você Precisa Saber

Há quatro tipos de seções cônicas: parábolas, circunferências, elipses e hipérboles.

Você pode classificar uma seção cônica escrita na forma geral usando os coeficientes de seus termos x^2 e y^2 .

Uma parábola é um conjunto de pontos no plano cartesiano que são equidistantes de um ponto fixo e de uma linha fixa. Sua forma padrão é $y =$

$a(x - h)^2 + k$ ou $x = a(y - k)^2 + h$, onde

.

Uma circunferência é um conjunto de pontos no plano cartesiano que são equidistantes de um ponto fixo. Sua forma padrão é $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 218

22/05/2014 14:53:38

Capítulo 16

Elipses e Hipérboles

Neste Capítulo:

Conversão de equações de elipses e hipérboles da forma geral para a forma padrão

Representação gráfica de elipses e hipérboles que não

estão necessariamente centralizadas na origem

Cálculo e interpretação da excentricidade de uma elipse

Pense em um grão de pipoca que não estourou. (Isso soa bem zen, não é verdade?) Um corte transversal de um grão não seria circular, mas teria uma forma oval (ou elíptica). As forças que formam o grão (não sou cientista, então devem ser algumas ou todas a seguir: gravidade, inércia, força centrífuga, força centrípeta, tensão superficial, força hidrostática, fissão, fusão, fotossíntese, força citoplasmática, força endoplasmática ou força plasma plasmática) focam o conteúdo na parte de dentro.

No entanto, ao ser aquecida, a umidade no grão se expande, acabando por estourar o grão em um foco de força para a parte de fora, uma explosão tão poderosa que só pode ser contida por um saco gorduroso e salgado feito para ser colocado no micro-

-ondas. Os grãos que explodiram são muito diferentes (como acho que aconteceria com todos nós se nossa umidade estourasse para fora de nossa pele a velocidades incríveis), mas todas as partes ainda estão lá. Eles ficam mais ou menos do avesso quando o grão estoura.

PF_CG_TCIG_Pre-Calculus.indb 219

22/05/2014 14:53:38



Se uma elipse é similar a um grão que não estourou, uma hipérbole é o que você obtém quando a elipse é aquecida e estourada. Como você verá neste capítulo, elas têm basicamente as mesmas partes, a única diferença está no foco da energia: para dentro (em um grão elíptico) ou para fora (em uma hipérbole que virou pipoca).

Eclipsando Elipses

A terceira seção cônica é a *elipse*, que (como mencionei) se parece com algo ovalado e (como um grão de pipoca) machuca os dentes se você mastiga. Ela obtém sua forma de um jeito vagamente similar a uma circunferência. Ainda assim, em

uma circunferência, cada ponto tem

Fale a Linguagem

exatamente a mesma distância de um ponto

Uma **elipse** é o

fixo; uma elipse, por outro lado, é formada

conjunto de todos os pontos no plano

por dois pontos fixos, cada um denominado

cartesiano de modo que a soma das

foco (ou *focos*, se você estiver falando em

distâncias de cada ponto para dois

ambos de uma vez).

pontos fixos (denominados **focos**)

Se você tomar qualquer ponto em uma elipse e continue constante.

adicionar as duas distâncias medidas do ponto

para cada um dos focos, acabará com o mesmo

total. Verifique a Figura 16.1 para entender o

que quero dizer.

Ponto Crítico

Aí vai um pouco de cultura

Na Figura 16.1, o ponto X na elipse define a

inútil interessante: as órbitas

distância a até o foco F e a distância b até o foco 1

dos planetas em torno do Sol

F . Tomando um ponto Y qualquer, definem-se

2

são elípticas, não circulares,

as distâncias c e d até os focos. Desse modo, como a maioria dos modelos

$a + b = c + d$, mesmo que os pontos X e Y estejam plásticos do Sistema Solar

em qualquer lugar da elipse.

(feitos de fios e bolas de plástico)

podem levá-lo a crer.

Figura 16.1

Esta elipse é

formada pelos dois

focos, denominados

F e F ; os pontos

1

2

X e Y estão na

própria elipse. As

constantes a , b , c e

d representam as

distâncias entre X e

Y e os focos.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 220

22/05/2014 14:53:39



Capítulo 16: Elipses e Hipérboles

221

Anatomia Elíptica

Há mais a saber sobre uma elipse do que simplesmente de seus focos (ela também tem uma personalidade incrível e talentos fascinantes como para o malabarismo), então, me deixe dividir uma elipse genérica em suas partes componentes para você.

Na Figura 16.2, desenhei duas elipses (uma que se estica horizontalmente e uma que se estica verticalmente. Esses são os dois únicos tipos de elipses que discutiremos.

Outras, rotacionadas em ângulos garbosos, são muito avançadas para o pré-cálculo.

eixo menor

Figura 16.2

Nestas elipses,

os focos são

eixo maior denominados F ,

os vértices são

denominados V e

eixo maior

os pontos do centro

eixo menor

são denominados C.

Observe que o eixo

maior é o que

contém os focos.

Se você conectar os focos de uma elipse, o ponto médio do segmento que você cria é denominado o *centro* da elipse. Pelo meio passam dois eixos perpendiculares, um horizontal e um vertical. O mais longo dos dois eixos é denominado *eixo maior* e

o mais curto é o *eixo menor*. Cada ponto

final do eixo maior é denominado *vértice*

Fale a Linguagem

da elipse (use a forma plural, *vértices*

O ponto médio do

quando estiver falando de ambos).

segmento cujos pontos finais

são os focos de uma elipse são

Em uma elipse com um eixo maior

denominados **centro** da elipse.

horizontal, os pontos que representam

Dois eixos perpendiculares passam

os focos, os vértices e o centro têm o

pelo centro e têm pontos finais na
mesmo valor de y , pois estão localizados
elipse. O mais longo dos dois é
no mesmo segmento de reta horizontal.
denominado **eixo maior** e o mais
De modo similar, os cinco pontos têm o
curto é o **eixo menor**. Cada ponto
mesmo valor de x em uma elipse com um
final do eixo maior é denominado
eixo maior vertical.
vértice da elipse.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 221

22/05/2014 14:53:39



222 Parte 4: Seções Cônicas

Forma Padrão de uma Elipse

Todos esses eixos, focos, pontos centrais e vértices se traduzem em variáveis que aparecem na forma padrão para uma elipse, conforme ilustrado na Figura 16.3.

Figura 16.3

Uma elipse

centralizada no
ponto (h,k) com
o comprimento
do eixo maior $2a$
e o comprimento
eixo maior
do eixo menor $2b$.

Mesmo se o eixo
maior desta elipse
fosse vertical em
vez de horizontal,
o eixo maior seria
escrito em termos
de a e o eixo menor
em termos de b .

Aqui está o significado de cada uma das constantes na Figura 16.3:

O centro da elipse é o ponto (h,k) . Esse é o mesmo par ordenado que você usou no centro de uma circunferência.

O comprimento do eixo maior é $2a$. Em outras palavras, você se deslocará exatamente a unidades à direita e à esquerda do centro para alcançar os vértices da elipse (se o eixo maior é horizontal, como na Figura 16.3; caso contrário, você se deslocará a unidades para cima e para baixo a partir do centro).

O comprimento do eixo menor é $2b$. Como Ponto Crítico

acontece com o eixo maior, você precisa se

Você sabia que uma

deslocar b unidades em direções opostas para

circunferência é tecnicamente

alcançar a elipse ao longo do eixo menor.

só um tipo especial de elipse,

assim como um quadrado é

A distância do centro para cada foco é

um tipo especial de retângulo?

c. Isso é similar a uma parábola, em que a Uma circunferência é somente

distância c representa a distância do vértice

uma elipse da qual o centro e os

até o foco e a diretriz.

focos estão do mesmo ponto.

Aqui estão as duas formas padrão de uma elipse:

ou

, se

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 222

22/05/2014 14:53:40



Capítulo 16: Elipses e Hipérboles

223

As únicas diferenças reais entre elas estão nos denominadores. Depois de terminar de colocar uma equação elíptica na forma padrão, você designa o denominador maior a^2 e o menor b^2 , só isso. Aqui está o impacto desta simples diferença: se o maior denominador está localizado abaixo $(x - h)^2$, a elipse tem um eixo maior horizontal, mas se $(y - k)^2$, tem o maior denominador, o eixo maior da elipse é vertical. Isto é fácil de lembrar: se o denominador x for maior, pense no eixo x (que é horizontal); se o denominador y for maior, pense no eixo y (que é vertical).

Como há dois binômios quadrados na fórmula (como a forma padrão de uma circunferência), você precisa completar o quadrado duas vezes para alcançar a forma padrão, pelo menos na maioria dos casos. Diferentemente dos círculos, contudo, a forma padrão de uma elipse não é definida como igual a r^2 . De fato, ela não é definida como igual a nenhuma variável. Uma elipse na forma padrão é *sempre* igual a 1.

Exemplo 1: Escreva a equação de cada elipse na forma padrão e represente-a graficamente:

a. A elipse com vértices $(6,1)$ e $(6,-9)$ e focos $(6,0)$ e $(6,-8)$ **Solução:** Como os vértices e os focos caem na mesma reta vertical ($x = 6$), o eixo maior é vertical; o centro da elipse é o ponto médio do segmento que conecta os focos: $(6,-4)$.

Para colocar a elipse na forma padrão, você precisa dos valores de h , k , a e

b. Neste ponto, você já sabe que $h = 6$ e $k = -4$ (as coordenadas do centro) e pode calcular facilmente

a (a distância do centro

Ponto Crítico

para qualquer vértice) e c

Se o ponto médio de um

(a distância do centro para

segmento não é óbvio, use a

qualquer foco): $a = 5$ e $c = 4$.

fórmula do ponto médio da

Substitua os valores de a e c

geometria: um segmento com

na fórmula

para

pontos finais (x_1, y_1) e (x_2, y_2) tem calcular b .

1

1

2

2

o ponto médio

.

Em outras palavras, o valor de x do

ponto médio é a média dos valores

de x dos pontos finais, e o valor de y

funciona do mesmo modo.

O sinal de b (como o sinal de a) realmente não importa, porque ele é elevado ao quadrado na forma padrão de qualquer maneira, embora a

maioria das pessoas goste de escrever a e b como números positivos, já que eles PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 223

22/05/2014 14:53:41



224 Parte 4: Seções Cônicas

representam distâncias. Agora, substitua $h = 6$, $k = -4$, $a = 5$ e $b = 3$ na forma padrão de uma elipse. Neste caso, a^2 deveria ser escrito abaixo de $(y - k)^2$, já que o eixo maior é vertical: Para representar graficamente essa

Alerta do Kelley

equação, indique o ponto central e os

Não conecte os quatro

vértices dados no problema original.

pontos no gráfico com linhas retas.

Como $b = 3$ (e o eixo menor é horizontal),

Você está representando graficamente

conte três unidades à esquerda e à

uma elipse, não um diamante!

direita do centro e marque esses pontos

também. Conecte os quatro pontos finais

dos eixos maior e menor usando uma

forma oval, como na Figura 16.4.

Figura 16.4

O gráfico da elipse

$$(x - 6)^2$$

$$(y - 4)^2$$

$$9$$

$$25 = 1, \text{ com}$$

o comprimento do eixo maior

$$2a = 10 \text{ e o comprimento do}$$

$$\text{eixo menor } 2b = 6.$$

b.

Solução: Comece agrupando os termos, de modo que o termo de x e o termo de y fiquem próximos um do outro na ordem de potências descendentes; mova a constante para o lado direito da equação: $(16x^2 + 32x) + (36y^2 - 216y) = 236$

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 224

22/05/2014 14:53:42

Capítulo 16: Elipses e Hipérboles

225

Fatore o coeficiente x^2 dos dois termos de x somente, então, fatore o coeficiente y^2 dos dois termos de y :

Complete o quadrado duas vezes adicionando 1 dentro dos parênteses de x e 9, dentro dos parênteses de y . Para manter a equação equilibrada, é necessário adicionar esses números ao lado direito depois que você multiplicá-los pelos números correspondentes em frente aos parênteses. Em outras palavras, você adiciona $16(1) = 16$ e $36(9) = 324$ ao lado direito da equação: $16(x^2 + 2x + 1) + 36(y^2 - 6y + 9) = 236 + 16 + 324$

Fatore e simplifique:

$$16(x + 1)^2 + 36(y - 3)^2 = 576$$

Uma elipse na forma padrão *deve* ser igual a 1, então, divida os três termos por 576 para cancelar a constante enorme. Simplifique as frações: Como $36 > 16$, o eixo maior deve ser horizontal (36 é o denominador da fração que contém x). Assim, ,

, $h = -1$ e $k = 3$. (Não esqueça que

h e k são sempre opostos às constantes nos binômios elevados ao quadrado.) Isso significa que a elipse está centralizada em $(-1, 3)$, tem um eixo maior horizontal com comprimento de $2a = 12$ e tem um eixo menor vertical com comprimento de $2b = 8$.

Para gerar o gráfico (desenhado na Figura 16.5), conte 6 unidades à esquerda e à direita do centro e indique os pontos finais do eixo maior. Então, conte 4

unidades para cima e para baixo do centro para indicar os pontos finais do eixo menor. Conecte os quatro pontos usando uma forma oval.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 225

22/05/2014 14:53:43



226 Parte 4: Seções Cônicas

Figura 16.5

A forma do gráfico de

$$(x - 1)^2$$

$$(y - 3)^2$$

$$36$$

$$16 = 1$$

*é quase uma piscina
Olímpica. Você quase
consegue imaginar
que Cesar Cielo é um
dos vértices.*

Você Tem Problemas

Problema 1: Escreva a equação elíptica

y^2

em sua forma

padrão, represente-a graficamente e calcule o comprimento de seu eixo maior.

Calculando a Excentricidade

Todas as pessoas, lá no fundo, têm algum nível de excentricidade. Não estou necessariamente falando de loucuras debilitantes que algumas pessoas demonstram por meio de uma coleção de 650 gatos em um apartamento de dois quartos ou um guarda-roupa que consiste somente em réplicas de uniformes da guerra civil e uma insistência teimosa para que todos se dirijam a você como “Coronel”. Mesmo assim, todos têm suas pequenas tolices. Algumas são mais evidentes que outras.

Quando você discute a *excentricidade* de uma elipse, não está falando sobre o quanto

Fale a Linguagem

ela é doida; você está descrevendo sua

A **excentricidade** de

“ovalidade”. Assim como a loucura humana, uma elipse, definida como c é um algumas elipses têm a excentricidade mais

a

valor no intervalo $[0,1]$ que descreve a
pronunciada que outras. No caso das elipses,
“ovalidade” de uma elipse.

você está respondendo a pergunta “Esta elipse
se parece mais com uma forma oval ou com
uma circunferência?” usando esta simples
fórmula: excentricidade = c/a .

a

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 226

22/05/2014 14:53:44

Capítulo 16: Elipses e Hipérboles

227

Em outras palavras, a excentricidade de uma elipse é igual a c/a (a distância do centro a um foco) dividido por a (a distância do centro a um vértice). Quanto mais próxima de 0 está a excentricidade, mais a elipse lembra uma circunferência; de fato, uma elipse com uma excentricidade de exatamente 0 na verdade é uma circunferência.

Quanto maior for a excentricidade, mais pronunciada é a forma oval da elipse.

Exemplo 2: Calcule a excentricidade da elipse com a equação

Solução: Esta equação já está na forma padrão, então, $h = 6$, $k = 9$, $a^2 = 64$ e $b^2 = 14$.

Para calcular a excentricidade, você precisa saber o valor de c , então, use a fórmula

:

A excentricidade é simplesmente c dividido por a : $e \approx 0,884$

Como 0,884 está mais próximo de 1 que de 0, a elipse é mais oval que circular.

Você Tem Problemas

Problema 2: Calcule a excentricidade da elipse com a equação

.

Lidando com Hipérboles

Uma *hipérbole*, como mencionei em minha deliciosa metáfora da pipoca, no começo do capítulo, se parece com uma elipse que estourou de dentro para fora. Enquanto a soma das distâncias de um ponto em uma elipse até os dois focos estivesse mantida constante, uma hipérbole faz exatamente o oposto. Ela garante que a *diferença* dessas distâncias sempre seja constante. Como você pode ver na Figura 16.6, essa pequena mudança na definição tem um impacto enorme no pobre e insuspeito gráfico elíptico.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 227

22/05/2014 14:53:45



228 Parte 4: Seções Cônicas

Figura 16.6

eixo conjugado

retângulo gerado

eixo transverso

por eixos

Nestes gráficos de

hipérboles com seus

eixos transversos

horizontais e

verticais, as variáveis

designam as mesmas retângulo gerado eixo transversal coisas que no caso das

por eixos

elipses: V = vértice,

eixo conjugado

F = foco e C = centro.

Como uma elipse, uma hipérbole tem focos, vértices e um centro; ela também tem dois eixos perpendiculares que cortam um ao outro no ponto central, mas eles têm nomes diferentes. Os comprimentos reais desses eixos não são tão importantes como eram no caso de uma elipse, então você não se referirá a eles usando os descritores “maior” e “menor” que tinham por base o comprimento. Em vez disso, o eixo que conecta os vértices agora é denominado *eixo real ou transversal*, e o outro é denominado *eixo imaginário ou conjugado*.

Fale a Linguagem

Se você medir as distâncias de qualquer ponto em uma **hipérbole** até dois pontos fixos (denominados **focos**) e calcular a diferença, obtém a mesma constante.

O ponto médio do segmento cujos pontos finais são os focos é denominado **centro** da hipérbole, e esses três pontos caem em um segmento denominado **eixo transversal**, cujos pontos finais (localizados no gráfico) são denominados **vértices**.

O **eixo conjugado** é perpendicular ao eixo transversal no centro da hipérbole.

Observe nas figuras 16.6 e 16.7 que esses eixos têm o comprimento e a largura de um retângulo pontilhado desenhado em cada gráfico. As diagonais desse retângulo (quando estendidas aos limites do gráfico) são as assíntotas da hipérbole.

Partes Fresquinhos de uma Hipérbole

Todas as distâncias importantes em uma hipérbole são indicadas por letras que você provavelmente não aguenta mais ver nas seções

cônicas. Todas as letras que você conheceu e ama: h , k , a , b e c .

Na figura 16.7, desenhei uma hipérbole genérica e indiquei todas as suas partes de modo que você consiga descobrir o que significam:

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 228

22/05/2014 14:53:45



Capítulo 16: Elipses e Hipérboles

229

O centro da hipérbole é (h, k) . Isto não é novidade, já que (h, k) está sempre no centro de uma seção cônica (exceto em parábolas, onde é o vértice, já que parábolas não têm um centro).

O comprimento do eixo transverso é $2a$. Em outras palavras, você desloca a unidades para cima e para baixo ou a unidades à esquerda ou à direita do centro para alcançar o vértice.

O comprimento do eixo

conjugado é $2b$. Lembre-se de que

o eixo conjugado é o eixo que *não*

cruza a hipérbole.

Alerta do Kelley

A distância do centro até um

O eixo transversal não

foco é c . A velha e fiel letra c

é necessariamente mais comprido

representava a distância de

que o eixo conjugado, então não

(h, k) até o foco desde a volta na

se refira automaticamente ao eixo

parábola. Observe que $c > a$ em

mais comprido dos dois como a ,

hipérboles. Os focos estão mais

como fazia com as elipses. Em vez

afastados do centro que os vértices

disso, sempre use a quando estiver se

(diferentemente das elipses, em

referindo ao eixo transversal.

que os focos ficavam mais próximos

ao centro que os vértices).

Figura 16.7

Uma hipérbole

centralizada em

(h, k) com um eixo

transverso horizontal.

Todas essas partes se unem na forma padrão, que tem uma aparência bem familiar.

Parece quase o mesmo que a forma padrão de uma elipse, exceto pelo fato de apresentar um sinal de negativo entre os termos fracionários em vez de um sinal positivo.

Forma Padrão de uma Hipérbole

Há duas formas padrão de uma hipérbole, uma para os eixos transversos horizontais e uma para os eixos transversos que são verticais:

ou

se

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 229

22/05/2014 14:53:46



230 Parte 4: Seções Cônicas

Aqui está o segredo: a fração que é positiva (e, assim, aparece primeiro na forma padrão) informa a direção para a qual a hipérbole está voltada. Se $(x - h)^2$ aparece sobre a^2 , a hipérbole normalmente abre à esquerda e à direita. Entretanto, se o termo $(y - k)^2$ está primeiro e tem o denominador a^2 , a hipérbole abre para cima e para baixo.

Para lembrar-se de qual é qual: como $(x - h)^2$ contém um x , se ele estiver na forma padrão, o gráfico deve abrir na mesma direção do eixo x (esquerda e direita). Por outro lado, se $(y - k)^2$ vier primeiro, a

hipérbole deve abrir na mesma direção do eixo y (para cima e para baixo).

Ademais, você completa o quadrado duas vezes (exatamente como fez com as elipses) para converter da forma geral para a forma padrão. Quando a hipérbole estiver na forma padrão, a representação gráfica não é difícil; siga as etapas a seguir: 1. Represente no gráfico o centro e use a e b para indicar os pontos finais dos eixos, como fez no gráfico da elipse.

2. Desenhe um retângulo usando linhas horizontais e verticais cujas dimensões combinem com os eixos transverso e conjugado.

3. Desenhe as diagonais do retângulo que você criou na Etapa 2 e estenda-as até os limites do plano cartesiano.

4. Determine quais dois dos quatro pontos finais que você desenhou na Etapa 1 são os vértices. Iniciando assim, desenhe um gráfico com aparência parabólica que se aproxima mas nunca toca as assíntotas.

Embora os dois braços da hipérbole (tecnicamente denominados *ramos*) possam ter uma aparência similar a das parábolas, não são iguais, parábolas não têm assíntotas!

Exemplo 3: Uma hipérbole cujos focos são $(0,3 - 10)$ e $(0,3 + 10)$ tem um eixo conjugado de comprimento 2. Escreva a equação da hipérbole na forma padrão e represente-a graficamente.

Solução: O centro do segmento, cujos pontos

finais são

Alerta do Kelley

$(0,3 + 10)$ e $(0,3 - 10)$, é $(0;3)$,

então $h = 0$, e $k = 3$. Como você precisa ir 10

Ambos os ramos

unidades para cima ou para baixo do centro

simétricos que não se cruzam fazem

para alcançar um dos focos,

.

o gráfico de uma única hipérbole. É

Você também sabe que o eixo conjugado

a única seção cônica que consiste em

(cujo comprimento está definido como $2b$) é

duas partes aparentemente separadas,

igual a 2. Se $2b = 2$, então $b = 1$. Logo, você tem a única que não pode ser desenhada

todas as constantes de que necessita para a

sem levantar seu lápis.

forma padrão, exceto para a . Use a fórmula

para solucionar isso:

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 230

22/05/2014 14:53:47

Capítulo 16: Elipses e Hipérboles

231

Como Você Fez Isso?

Pode ser que você seja solicitado a achar as equações das assíntotas de uma hipérbole, um processo muito fácil se você primeiro representar graficamente a hipérbole e usar o retângulo que é formado pelos eixos transversos e conjugados.

Cada assíntota (lembre-se de que todas as hipérboles têm duas) com certeza passa pelo centro e por exatamente dois cantos do retângulo. Para escrever a equação, pegue dois desses três pontos e use a técnica que revisou antes no Capítulo 2, Exemplo 2a.

É hora de designar todas essas constantes na forma padrão, mas qual deve ser usada? Como o segmento que conecta os focos é vertical, o termo $(y - k)^2$ deve estar antes do termo $(x - h)^2$: Para gerar o gráfico da hipérbole na Figura 16.8, marque o centro e então desenhe os eixos. O eixo transversal vertical se estende 3 unidades para cima e para baixo desde o centro, e o eixo conjugado horizontal se estende

uma unidade à esquerda e à direita do centro. Agora desenhe um retângulo centralizado em (0,3), cujos lados passam pelos pontos finais dos eixos e estendem suas diagonais, que serão as assíntotas do gráfico.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 231

22/05/2014 14:53:48

232 Parte 4: Seções Cônicas

Figura 16.8

O gráfico de

$$(y - 3)^2 - x^2 = 9$$

é

uma hipérbole com

um eixo transversal

vertical.

Desenhe os ramos do gráfico de modo que comecem nos pontos finais do eixo transversal e se estiquem em direção às assíntotas.

Você Tem Problemas

Problema 3: Reescreva a equação $25x^2 - 16y^2 + 100x - 32y - 316 = 0$ na forma padrão e represente-a graficamente.

O Mínimo que Você Precisa Saber

O centro de uma elipse e uma hipérbole é (h, k) a distância do centro até um dos focos é c .

Na forma padrão de uma elipse,

, mas em uma hipérbole,

Converter equações de elipses e hipérbóles da forma geral para a forma padrão requer que você complete o quadrado duas vezes, uma para x e uma para y .

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 232

22/05/2014 14:53:48







Matrizes e

Parte 5 Montagem

Matemática

Nesta parte, você vai explorar o mundo curiosamente ordenado e retangular das matrizes. Pode parecer estranho que as variáveis simplesmente desapareçam, depois de ocuparem centenas de páginas e aparecerem em todos os tamanhos, formas e origens étnicas. É como se tivesse ocorrido uma catástrofe (talvez um cometa, ou uma nova era do gelo, ou uma gigantesca inundação), pois as variáveis, que estavam no topo da cadeia alimentar, agora estão praticamente extintas. Os números não apenas começaram a rastejar para fora de suas cavernas mesolíticas, mas estão se mobilizando e organizando seus diferentes grupos. Como este livro começou com um capítulo com nada além de números, parece apropriado que seus últimos tópicos sejam repletos de números. Sem esquecer do exame final (mas fique tranquilo, não vale nota – e eu mesmo darei as respostas).

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 233

22/05/2014 14:53:50

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 234

22/05/2014 14:53:50

Capítulo 17

Operações e Cálculos

com Matrizes

Neste Capítulo:

Adição, subtração e multiplicação de matrizes

Cálculo de determinantes usando os modelos de multiplicação

diagonal

Expansão de linhas e colunas com menores e cofatores

Resolução de sistemas de equações usando a Regra de Cramer

Não há como discutir operações com matrizes sem trazer para o assunto os três filmes *Matrix*. Assisti a todos eles várias vezes e sou, num certo sentido, especialista no assunto. Caso você não tenha assistido, aqui está uma breve sinopse de cada um.

Matrix: um cara chamado Neo engole uma pílula vermelha, que faz com que ele aprenda Kung Fu, vista calças apertadas, tenha um buraco de metal na parte de trás da cabeça e conheça uma garota legal que também veste calças apertadas. *Matrix Reloaded*: tem uma parada de ônibus que não compreendo muito, um cara com um sotaque francês carregado que não consigo entender sem legendas e a mulher do Will Smith (que pilota naves espaciais enquanto usa óculos escuros). *Matrix Revolutions*: Neo luta na chuva enquanto máquinas assustadoras atiram em outras máquinas mais assustadoras.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 235

22/05/2014 14:53:50

236 Parte 5: Matrizes e Montagem Matemática Supostamente, há muito mais a ser analisado a respeito desses filmes, como metáforas messiânicas, mitologia sutilmente encoberta e um cara que se parece com o Coronel Sanders mas fala como Stephen Hawking. Para piorar as coisas, cada filme *Matrix* era mais difícil de entender que o anterior. A linha básica do enredo é simples: Neo = bom, Trinity = bom, Morpheus = bom, robôs matadores gigantes que jogam bombas e cortam você pela metade = maus. Além disso, precisei assistir diversas vezes para descobrir pequenos detalhes.

O mesmo acontece com as operações com matrizes na matemática. Em termos práticos, as matrizes ajudam a organizar e gerenciar sistemas enormes de equações com o mínimo esforço. Embora iniciem de maneira bem simples (somar e subtrair matrizes não poderia ser mais fácil), ficam mais complicadas (“Uh, superar a multiplicação de matrizes de novo?”) e, por fim, ficam muito estranhas (“Eliminação de Gauss-Jordan? O que é isso?”). Ainda assim, quanto mais você praticar

cada uma, mais fácil é compreendê-las.

Se ajudar, tente vestir calças apertadas. No mínimo, levará um pouco mais de sangue para seu cérebro para prepará-lo para esses tópicos, que são diferentes de todos os outros no pré-cálculo. Sem mais barulho, vamos saltar (como Morpheu diria) para ver “até onde vai a profundidade do buraco do coelho”.

Adição e Subtração de Matrizes

Uma matriz é um bloco retangular de números, escritos em linhas e colunas e cercados por grandes colchetes, como a matriz A a seguir: Esta matriz A consiste em oito *elementos* (ou *entradas*), organizados em duas linhas e quatro colunas – ou seja, tem a *ordem* 2×4 (sempre escreva o número de linhas antes do número de colunas ao descrever a ordem.). Se quiser, pode escrever a ordem de uma matriz perto de sua variável, assim: A . Se uma matriz tiver o mesmo número 2×4

de linhas e colunas, é denominada *matriz quadrada*. Ao referir-se a elementos individuais dentro de uma matriz A , use a notação a , que representa o elemento na ij linha i e coluna j da matriz A . Por exemplo, na matriz A , definida anteriormente, $a = -3$ e $a = -5$.

12

24

PF_CG_TCIG_Pre-Calculus.indb 236

22/05/2014 14:53:50



Fale a Linguagem

Uma **matriz** é uma lista retangular de números (chamados **elementos** ou **entradas**), organizados em linhas e colunas cercadas por colchetes. A **ordem** de uma matriz descreve suas dimensões e é escrita $m \times n$ (onde m é o número de linhas e n é o número de colunas). Se uma matriz tiver um número igual de linhas e colunas, é denominada **matriz quadrada**.

Há três operações básicas com matrizes:

Multiplicação escalar. Você pode multiplicar uma matriz por qualquer número. Tudo o que precisa fazer é multiplicar cada elemento por esse número. (Por alguma razão, o pessoal da matemática chama o número que você está multiplicando de *escalar* em vez de constante.)²

$$9 \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$3 \cdot 9 \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix}$$

$$27 \begin{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$3 \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$$

$$- \end{pmatrix}$$

$$0$$

$$1$$

$$- 5$$

$$\lfloor$$

$$\rfloor$$

$$\rfloor \lfloor$$

$$\rfloor$$

Adição de matrizes. Você pode somar duas matrizes da mesma ordem somando os termos correspondentes.

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix}$$

-

|

| =

$$-2 + 5$$

$$3 +$$

|

$$(-8) | = 3 -$$

|

$$5 |$$

$$| 1$$

$$5$$

$$- || 2$$

$$2$$

L

J

-

L

J||

$$1 + 2 - 5 +$$

L

$$(-)$$

$$2 J|| 3 -$$

L

$$7 J||$$

Subtração de matrizes. Você

pode subtrair uma matriz de

Ponto Crítico

outra subtraindo os elementos

Tecnicamente, a subtração de correspondentes.

matrizes é uma combinação de multiplicação escalar e adição.

Ao subtrair, você só está, de

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 - 2 & 2 - 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

|

fato, multiplicando a segunda

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \times 2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}$$

|

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \times 2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \times 2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}$$

--

| |

|

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \times 2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}$$

|

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

matriz pelo escalar -1 e, então,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

somando as duas matrizes.

Você Tem Problemas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 1: Calcule -2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

|

| + |

| - |

4 3

9 7

4

6 |

|

|

|

|

-

|

|

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 237

22/05/2014 14:53:52



238 Parte 5: Matrizes e Montagem Matemática

Multiplicação de Matrizes

A multiplicação de matrizes leva muito mais tempo para ser efetuada que a adição ou a subtração, porque não é tão simples como a multiplicação de elementos correspondentes. Ainda assim, antes que você possa calcular o produto de uma matriz, precisa verificar para saber se a multiplicação chega a ser possível. Um requisito deve ser satisfeito: o produto de A e B existe somente se $n = p$. Em $m \times n$ $p \times r$

outras palavras, o número de colunas na primeira matriz deve ser semelhante ao número de linhas na segunda matriz.

De acordo com esta condição, o produto

$(M) \times (N)$ não existe (já que M tem quatro 3×4

3×4

colunas e N tem 3 linhas), mas o produto

$(C)(D)$ sim. (Quando eu digo M, N, C e $D, 2 \times 5$

5×1

Alerta do Kelley

não estou me referindo a nenhuma matriz

A multiplicação de

em particular aqui. Estes são apenas nomes

matrizes não é comutativa, então,

genéricos de matrizes com dimensões muito

você não pode supor que $A \cdot B = B \cdot A$

específicas. No momento, só quero focar nas

para as matrizes A e B . Nunca inverta

dimensões.) Eu sei que isso é estranho porque

a ordem das matrizes. Se fizer isso,

as matrizes C e D são realmente diferentes,

poderá até não haver produto.

mas M e N têm *exatamente a mesma ordem*.

Infelizmente, não importa o quão similares

sejam M e N , elas nunca são multiplicadas uma pela outra. (Isto também é verdade em relação

à atriz Reese Witherspoon e eu.)

Digamos que você tenha duas matrizes A e B , cujos produtos existam (graças à $m \times n$

$n \times p$

dimensão n combinada). Esse produto será alguma matriz C , cuja ordem é $m \times p$; ela terá o mesmo número de linhas que A e o mesmo número de colunas que B . Cada elemento c na matriz C tem de ser calculado separadamente, de acordo com as ij etapas a seguir:

1. Preste atenção na linha i da matriz A e na coluna j da matriz B . Logo você perceberá porque essas dimensões precisaram ser combinadas desse modo peculiar.

2. Mova à direita cruzando a linha e para baixo através da coluna, multiplicando pares de números. Em outras palavras, multiplique o número mais à esquerda na linha pelo número mais acima na coluna. Então mova um elemento à direita em A e um elemento abaixo em B e multiplique.

Você alcançará o fim da linha e da coluna simultaneamente.

3. Some os produtos da Etapa 2. A soma de todos os produtos que você acabou de calcular será c , o elemento de C localizado na linha i e na coluna j .

ij

Como você multiplica elementos das linhas por elementos das colunas, isso ajuda a marcar seu lugar em cada matriz com seus dedos indicadores. De outro modo, é realmente fácil perder o lugar.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 238

22/05/2014 14:53:52

Capítulo 17: Operações e Cálculos com Matrizes 239

Exemplo 2: Se

e

, calcule $A \cdot B$.

Solução: A tem duas colunas, B tem duas linhas, então $A \cdot B$ existe e terá ordem 2×3 (já que A tem duas linhas e B tem 3 colunas). Isso ajuda a escrever o produto (que eu chamarei de C) com variáveis para indicar os locais para os elementos que você calculará momentaneamente: Para calcular c , multiplique $a = -3$ por $b = 7$ e $a = 2$ por $b = 4$. Como você atingiu 11

11

11

12

21

o fim da linha de A e da coluna de B , essa é a multiplicação que você precisa fazer para o elemento $c = -21 + 8 = -13$. Não foi tão terrível, foi? É só fazer a mesma coisa 11

até o fim para preencher o resto da matriz C .

Caso você ainda não tenha entendido muito bem o que estou querendo dizer, deixe-me fazer outro elemento no produto para você. Para calcular c , você 23

multiplica os elementos da segunda linha de A (da esquerda para a direita) pelos elementos da terceira coluna de B (da parte superior até a parte inferior) e soma os resultados: Esta é a aparência do produto final:

Você Tem Problemas

Problema 2: Calcule

.

Cálculo dos Determinantes Usando Atalhos

Um *determinante* é um número real definido para cada matriz quadrada. Ele tem toneladas e toneladas de usos práticos, mas, infelizmente, você não aprenderá a maioria deles, a menos que esteja

perseguindo a obtenção de um diploma em matemática. (Eu entendo o contrário: por experiência própria, digo que um diploma em matemática PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 239

22/05/2014 14:53:53



240 Parte 5: Matrizes e Montagem Matemática

persegue você, como naqueles sonhos em que você está sendo seguido por um monstro gigante e, não importa o quão rápido você tente fugir, ele está sempre só alguns passos atrás de você, batendo seus dentes enormes e sacudindo um estojo protetor contra queda de tinta de caneta para bolso em sua direção.) Para indicar que você está calculando um determinante, use barras ao redor do nome da matriz, $|A|$, ou da própria matriz, deste modo: $3 \ 4$. Também tenho visto 1

—

7

livros-texto usando a notação $\det(A)$, mas isso é muito menos comum. Embora essas linhas verticais na expressão $|A|$ possam parecer com barras de valores absolutos, elas não são. As barras ao redor dos números indicam um valor absoluto, mas as barras ao redor de matrizes indicam um determinante. As barras da cerca da sua casa indicam que você precisa se mudar para uma vizinhança mais segura.

Calcular os determinantes de matrizes

quadradas muito pequenas (matrizes 2×2 e 3

Fale a Linguagem

$\times 3$, especificamente) é muito fácil. Há atalhos

Cada matriz quadrada

úteis – específicos de cada tamanho – que

tem um número real associado a ele,

requerem somente que você multiplique em

chamado de **determinante**.

uma direção diagonal e some ou subtraia. Depois

de aprender os atalhos, mostrarei a você o

“caminho real” (ou seja, “mais confuso e trabalhoso) de calcular determinantes.

Matrizes 2×2

$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$

O determinante da matriz 2×2

$\begin{bmatrix} \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ é igual a $ad - cb$. Comece no canto esquerdo

$\begin{bmatrix} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \end{bmatrix}$

superior e multiplique para baixo diagonalmente. Então vá até o canto esquerdo mais inferior e multiplique para cima diagonalmente e subtraia isso do primeiro produto, conforme ilustrado na Figura 17.1.

Figura 17.1

Multiplique ao longo das

setas e subtraia os produtos

para calcular o determinante

de uma 2×2 .

Exemplo 3: Calcule -6

3 .

$-2 - 4$

Ponto Crítico

Se uma matriz A contém

Solução: Multiplique -6 pelo número diagonalmente

somente um elemento,

a partir dele (-4) e então subtraia disso o número -2

então $|A|$ é igual a esse

multiplicado pelo seu vizinho diagonal (3) :

elemento.

-6

$3 = (-6)(-4) - (-2)(3) = 24 + 6 = 30$

$-2 - 4$

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 240

22/05/2014 14:53:54

Capítulo 17: Operações e Cálculos com Matrizes 241

Você Tem Problemas

Problema 3: Calcule

.

Matrizes 3×3

É necessário um pouco mais de esforço para descobrir o determinante de uma $a \ b \ c$

matriz 3×3 . Aqui estão as etapas a serem seguidas para calcular $d \ e \ f$
: $g \ h \ i$

1. **Crie uma matriz 3×5 copiando colunas.** As três primeiras colunas são da matriz dada. A quarta e a quinta coluna são cópias exatas da primeira e segunda coluna, respectivamente: $\begin{bmatrix} a & b & a & b & a & b \end{bmatrix}$

$c \ a \ b \]$

$| \ d \ e \ f \ d \ e \ |$

$|$

$|$

$| \ g \ h$

$i \ g \ h$

$|$

$| \]$

2. **Multiplique ao longo de seis diagonais, somando e subtraindo de acordo com a adequação.** Cada diagonal envolve três elementos. Mais uma vez, comece pelo canto esquerdo superior e multiplique os elementos nas três diagonais que apontam para baixo, somando os resultados. Então, corra para baixo até o canto mais inferior à esquerda e multiplique os elementos em três diagonais apontando para cima, desta vez *subtraindo* os resultados, conforme ilustrado na Figura 17.2. O determinante será $aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$.

Figura 17.2

Ao calcular um determinante

3×3 , há três diagonais em

cada direção. Todas as setas

que apontam para baixo

indicam adição e setas que

apontam para cima indicam

subtração, como em uma

matriz 2×2).

22/05/2014 14:53:55

242 Parte 5: Matrizes e Montagem Matemática

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Exemplo 4: Se $A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & -6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \end{bmatrix}$ calcule $\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \end{bmatrix}$

Solução: Faça uma matriz 3×5 de modo que três colunas à esquerda sejam iguais A , a quarta coluna combine com a primeira coluna e a quinta coluna combine com a segunda coluna:

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$

0

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 6 \end{bmatrix}$

$-$

$\begin{bmatrix} 4 & 9 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \end{bmatrix}$

Multiplique ao longo das diagonais para obter o determinante: **Você Tem Problemas**

3

2

—

5

Problema 4: Calcule $1 \ 9 \ 7$.

0

1

— 4

Cálculo dos Determinantes

Usando Expansões

Ainda que a fatoração tenha sido um jeito rápido, útil e fácil de resolver equações quadráticas, nem sempre ela funcionava. Se a quadrática fosse prima, você teria de recorrer a algo usando a fórmula quadrática ou completando o quadrado; embora ambas as alternativas sempre funcionassem, elas normalmente levavam mais tempo e representavam mais chances de estragar tudo, graças aos procedimentos mais complicados envolvidos.

Quando as matrizes são o assunto, as expansões desempenham um papel de reforço confiável, ainda que complexo e longo aos atalhos que você aprendeu na seção anterior. Você pode calcular qualquer determinante (não importa as dimensões) usando o método de expansão, mas você não gostaria de fazer isso. Não me leve a mal. Não é tão difícil, só leva mais tempo.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 242

22/05/2014 14:53:56



Capítulo 17: Operações e Cálculos com Matrizes

243

Cálculo da Menor e dos Cofatores

O método de expansão depende muito de dois conceitos: *menores* e *cofatores*. Ambos são simplesmente números reais que correspondem a um único elemento na matriz.

Em outras palavras, uma matriz que contém nove elementos tem nove menores e cofatores (que provavelmente são diferentes).

Chega de generalizações – vamos aos negócios e sejamos mais específicos sobre o que são essas coisas. A menor M do elemento a da matriz é o determinante dessa ij

ij

matriz, já que a linha i e a coluna j são eliminadas. Desse modo, se você começar com uma matriz $m \times m$ (as dimensões se combinam porque precisa ser ao quadrado), a menor será o determinante de uma matriz $(m - 1)(m - 1)$. Mantenha em mente que a linha e a coluna que você elimina não podem ser *permanentemente* esquecidas. Só ignore-as durante o cálculo da menor.

Um cofator é a alma gêmea de uma menor. Eles têm quase tudo em comum. De fato, a única diferença tangível entre os dois é que eles têm humores diferentes. Se um é positivo, o outro pode ser negativo; entretanto, existe a mesma probabilidade de que eles tenham o mesmo sinal. Tecnicamente, o cofator, C do elemento de uma ij matriz a é definido deste modo:

ij

Fale a Linguagem

Embora essa fórmula pareça um

A **menor** (M) de um

ij

pouco doida, ela se reduz a isto: o elemento a é o determinante da

ij

cofator de um elemento é a menor matriz, já que a linha i e a coluna j desse elemento multiplicada por 1 ou são eliminadas. O **cofator** (C) do

ij

-1 . Especificamente, se $(i + j)$ for um elemento a é a menor multiplicada

ij

número par, o cofator e a menor serão por $(-1)^{i + j}$.

combinados, mas se $(i + j)$ for ímpar, o cofator é o oposto da menor.

Exemplo 5: Calcule a menor e o cofator de a na matriz $A =$

.

31

Solução: Este problema pede para calcular M e C , a menor e o cofator do 31

31

elemento na terceira linha e primeira coluna (-7) . Para calcular M , elimine 31

a terceira linha e a primeira coluna, então, use o atalho 2×2 para calcular o determinante do que resta:

22/05/2014 14:53:56



244 Parte 5: Matrizes e Montagem Matemática

Para calcular C , multiplique M por $(-1)^3 + 1$, que é igual a $(-1)^4$, ou somente o bom e 31

31

velho 1. Assim, $C = 15$ também.

31

Você Tem Problemas

Problema 5: Calcule a menor e o cofator do elemento -2 na matriz

Expansão de Linhas e Colunas

Quando você tiver uma boa compreensão sobre as menores e os cofatores, o método de expansão (o “caminho longo” do cálculo de determinantes) será moleza. Há somente três etapas simples a serem seguidas: 1. **Escolha uma única linha ou coluna da matriz.** Não importa a linha ou coluna que você escolher, obterá a mesma resposta quando tiver acabado.

2. **Multiplique cada elemento na linha ou coluna que você escolher por seu cofator.** Isso dá a você uma sequência de números que estão com coceira para serem combinados.

3. **Adicione esses cofatores.** Ah, a coceira passou.

O ato de multiplicar os elementos de uma linha ou coluna por seus cofatores é denominado “expansão” da linha ou coluna,

devido ao nome dessa técnica. É uma boa ideia,

Alerta do Kelley

quando possível, expandir algo que contém

Alguns estudantes ficam

um ou mais zeros. Pense nisso, não importa

fascinados ao saber que podem

qual seja seu cofator, um elemento 0 vezes seu

escolher *qualquer* linha ou coluna que

cofator é sempre igual a 0, então, você pode

queiram expandir e tentam expandir

economizar tempo e eliminar o cálculo desse

uma diagonal (como se estivessem

cofator junto.

jogando o jogo da velha), mas não

adianta fazer isso.

Exemplo 6: Dado que

calcule $|A|$.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 244

22/05/2014 14:53:57



245

Solução: Não há atalho para calcular o determinante de uma matriz 4×4 ; você precisa expandir uma linha ou coluna. Recomendo a terceira coluna, já que ela contém dois zeros ($a = 0$ e $a = 0$).

23

43

Multiplique cada elemento da terceira coluna por seu cofator: Graças a esses dois zeros, você não

precisa calcular C e C . Talvez, você

Ponto Crítico

23

43

não ache que é necessário, mas gosto

Você pode verificar sua resposta

de escrever meus cofatores como

expandindo outra linha ou

menores antes de iniciar os cálculos:

coluna para ver se obtém o

mesmo determinante.

Finalmente, chegou a hora de calcular as menores. Quando você elimina linhas e colunas temporariamente, fica com matrizes 3×3 . Então, use o atalho do determinante $3 - 3$ que aprendeu anteriormente neste capítulo: Agora que você conhece as menores, substitua em: **Você Tem Problemas**

Problema 6: No Problema 4 deste capítulo, você foi solicitado a calcular

Se você usou o atalho 3 x 3 corretamente, obteve uma resposta de 132. Verifique esta resposta refazendo o problema com o método de expansão.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 245

22/05/2014 14:53:58



246 Parte 5: Matrizes e Montagem Matemática

Regra de Cramer

Você lembra como resolver sistemas de equações em álgebra? Eles normalmente tinham duas equações lineares que eram mais ou menos assim:

Sua tarefa era imaginar qual ponto (x, y) tornava ambas as equações verdadeiras (se esse ponto existisse). Graficamente, isso significava encontrar o ponto em que os gráficos dessas duas linhas se cruzavam. Ainda assim, gráficos desenhados manualmente não costumam ser precisos o suficiente para levar a uma resposta confiável.

Essa imprecisão em potencial levou a duas técnicas importantes para resolver sistemas de equações:

Ponto Crítico

Substituição. Resolva uma das equações

Em casos raros, as equações

para uma variável e substitua o resultado

em um sistema são, na verdade,

na outra equação.

múltiplas umas das outras,

resultando em um número

Eliminação. Multiplique uma das

infinito de soluções. Os dois

equações por uma constante (ou ambas

gráficos, de fato, se sobrepõem

por diferentes constantes) de modo que

em cada ponto, em vez de se

quando as equações forem somadas, uma

cruzarem em um único.

das variáveis seja cancelada, permitindo

que você resolva para a outra.

Essas técnicas funcionam, mas o pré-cálculo oferece uma maneira nova e criativa de resolver sistemas de equações, graças aos determinantes. O processo é denominado *Regra de Cramer* e envolve um pouco de manipulação de matrizes.

Enquanto o cálculo de menores e cofatores requeria a *remoção* de linhas e colunas da matriz, a Regra de Cramer requer a *substituição* de colunas em uma matriz pelas colunas de outra matriz.

Assim, entendo que você esteja um pouco chateado. Depois de aprender todas essas operações novas e doidas com matrizes, você finalmente começa a usá-las para *resolver problemas que você sabia como resolver há muito tempo, e não é sequer mais rápido!*

Desculpe, mas veja o lado bom: pelo menos você conseguirá verificar

suas respostas com técnicas que aprendeu antes.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 246

22/05/2014 14:53:58



Capítulo 17: Operações e Cálculos com Matrizes

247

Deixe-me mostrar como o método de Cramer funciona no contexto de um exemplo: **Exemplo 7:** Resolva o sistema:

Solução: Crie uma “matriz de coeficientes” cujos elementos sejam coeficientes de x e y em ordem; eu chamarei isso de matriz C :

Aqui está a substituição de colunas sobre a qual falei. Crie mais duas matrizes, X

e Y , que começam como C mas têm uma coluna substituída por uma coluna que contém as constantes (14 e -16 do sistema de equações). Na matriz X , substitua os coeficientes de x (2 e -3) por essas constantes, e na matriz Y , substitua os coeficientes de y (-6 e 4). Observe que os coeficientes de y na matriz X não estão trocados, como são os coeficientes de x na matriz Y . Agora calcule os determinantes de X , Y e C .

Para obter a solução para o sistema,
tudo o que você precisa fazer é

Ponto Crítico

dividir os determinantes de X e Y

Você também pode usar a

pelo determinante de C :

Regra de Cramer para sistemas

de três equações com três

variáveis, como três equações

contendo x , y e z . Todas as

matrizes serão 3×3 , e você terá

de jogar em mais uma matriz, Z , que

é gerada pela substituição da terceira

coluna da matriz de coeficientes pela

coluna de constantes.

A solução para o sistema é $(4, -1)$.

Você Tem Problemas

Problema 7: Resolva o sistema:

.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 247

22/05/2014 14:53:59

248 Parte 5: Matrizes e Montagem Matemática O Mínimo que Você Precisa Saber

Se $(A)(B)$ existe, então $n = p$, e o produto será uma matriz $m \times r$.

$m \times n$

$p \times r$

Uma menor de um elemento é o determinante da matriz quando a linha e as colunas que contêm o elemento são removidas; o cofator é a menor multiplicada por 1 ou -1 , dependendo da posição do elemento.

Você pode expandir uma linha ou uma coluna de uma matriz para calcular seu determinante.

A Regra de Cramer permite que você resolva sistemas de equações calculando determinantes de várias versões da matriz de coeficientes do sistema.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 248

22/05/2014 14:53:59

Capítulo 18

A Enigmática Pílula Vermelha

de Aplicações de Matrizes

Neste Capítulo:

Matrizes identidade e inversas

Manipulação de matrizes com operações com linhas

Forma da matriz escalonada reduzida por linhas

Resolução de equações que contêm matrizes

Devo exibir minhas tendências nerds e trazer os filmes *Matrix* de volta à discussão (também, para explicar o título deste capítulo). Há muito poucas sobreposições a serem feitas entre matemática e cultura pop, então, quando surge um filme com um título que advém de um conceito matemático, eu simplesmente perco o controle. Perdoe-me.

De qualquer modo, o foco central do primeiro filme *Matrix* (que é tido como o melhor filme da série) é que as pessoas são ligadas a máquinas

e vivem suas vidas inteiras sem perceber que o que acham que é verdadeiro e importante, na verdade não é. Para escapar da *Matrix*, nosso herói, Neo, precisa engolir uma pílula vermelha enorme dada a ele por aqueles que querem libertá-lo. Depois que a pílula é ingerida, não tem mais volta.

Mesmo quando são um pouco difíceis de engolir, as matrizes fazem coisas realmente incríveis, como resolver sistemas de equações sem usar variável alguma. Elas têm força física para fazer milhares de apoios sobre uma única mão; então, é melhor nos rendermos a elas enquanto exibem seus poderes.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 249

22/05/2014 14:54:00

250 Parte 5: Matrizes e Montagem Matemática Este capítulo (apropriadamente, o último no livro que contém novos tópicos) é um portal para a matemática superior. Depois que você ingerir as técnicas e os métodos ocultos, nas páginas a seguir (lendo-as ou simplesmente arrancando as páginas e comendo – vá em frente e tente, elas têm gosto de hortelã), você começará a ver algumas das forças reais que a matemática pode controlar. (Aproveitando, quando eu digo “gosto de hortelã”, quero dizer “provavelmente venenoso”, então, talvez você prefira só ler as páginas.) **Questões Relativas à**

Miscelânea de Matrizes

Há alguns conceitos básicos que precisamos discutir antes de seguirmos adiante. Eles aparecerão ao longo do capítulo, então, certifique-se de que sejam bem compreendidos.

Todos são relacionados a matrizes (surpresa, surpresa), mas os conceitos são remanescentes de assuntos discutidos nos capítulos anteriores deste livro.

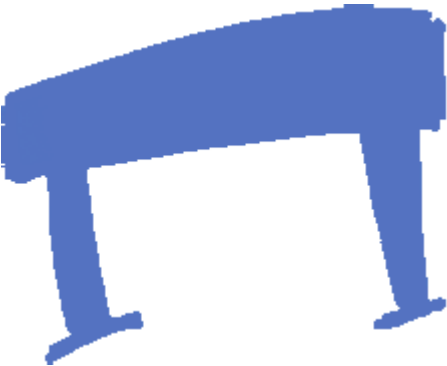
Matrizes Aumentadas

Quando você usou a Regra de Cramer para resolver sistemas de equações, no final do Capítulo 17, havia matrizes específicas envolvidas. Você começou com uma matriz de coeficientes (apresentando todos os coeficientes do sistema) e então substituiu suas colunas, uma de cada vez, pelas constantes do sistema. Assim, as constantes são importantes, têm que aparecer na solução de algum modo. Substituir colunas até ficar entediado e calcular todos aqueles determinantes é realmente chato – é pior ainda quando você tem mais

de duas equações no sistema.

Há outro modo de reescrever um sistema como uma matriz, que não requer que você troque colunas conforme segue adiante. Se você juntar a matriz dos coeficientes e a coluna de constantes, acabará com uma *matriz aumentada* (literalmente, uma matriz de coeficientes que é aumentada apertando as constantes lá dentro também). Esse sistema de equações é traduzido nesta matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & 14 \end{array} \right]$$



Capítulo 18: A Enigmática Pílula Vermelha de Aplicações de Matrizes
251

Observe que uma linha pontilhada separa a matriz de coeficientes 2×2 da coluna 2×1 de constantes. Esse limite torna claro onde terminam os coeficientes e começam as constantes. Uma matriz aumentada costuma ser denotada como ,

onde A é a matriz à esquerda da linha pontilhada e B é a matriz à direita.

A Matriz Identidade

Entre as propriedades algébricas importantes do Capítulo 1, falei sobre as propriedades de identidade da adição e da multiplicação. Elas oficialmente nomeiam os elementos de identidade, números que não modificam uma quantidade quando uma operação é aplicada a ela. Você provavelmente sempre soube que somar 0 a algo ou multiplicar algo por 1 não altera seu valor, mas as propriedades de identidade materializam o instinto matemático em fato matemático.

As matrizes também têm identidades aditivas e multiplicativas. A identidade aditiva é somente uma matriz de ordem

Alerta do Kelley

combinada cheia de zeros. Em outras

Embora as matrizes

palavras, dada a matriz A , você pode

tenham identidades aditivas e

$$m \times n$$

somar uma matriz $m \times n$ cujos elementos

multiplicativas, o termo genérico

sejam todos 0 e acabará com A . Isso não

“matriz identidade” sempre significa

é muito difícil. Na verdade, é somente

a matriz identidade multiplicativa

a propriedade da identidade aditiva

(com a diagonal de 1s – “uns”, vários

aplicada periodicamente, para cada

“uns”), a menos que seja observado

elemento na matriz.

de outro modo.

Ainda assim, a identidade da multiplicação é um pouco mais complicada. A *matriz identidade* correspondente a qualquer matriz quadrada B , é uma matriz de ordem $m \times m$ combinada que contém todos os zeros, exceto no início diagonal no canto esquerdo superior e descendo para o canto direito inferior. Esses elementos devem ser todos 1.

Desse modo, essa matriz 3×3

tem uma matriz identidade, I , que tem esta aparência:

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 251

22/05/2014 14:54:06

252 Parte 5: Matrizes e Montagem Matemática Como Você Fez Isso?

Caso você esteja cético, há evidências aqui de que o produto de B e I seja somente B .

Conforme prometido, a multiplicação por uma matriz identidade não muda nada (embora pareça bem trabalhosa para não mudar nada, não é?):

Operações com Linhas de Matrizes

No capítulo anterior, ao discutir a Regra de Cramer, mencionei a técnica de eliminação para resolver sistemas de equações, em que você podia fazer duas coisas interessantes com as equações em qualquer sistema: multiplicar uma equação inteira por outro número, exceto 0, e somar duas equações em um sistema.

Você ainda pode fazer isso em um sistema representado por uma matriz; são denominadas *operações com linhas*.

Sempre que eu fizer uma operação com uma linha, indicarei o que fiz, em qual linha (usando L para representar a Linha 1, L para representar a Linha 2 e assim por 1

2

diante) e qual linha contém o resultado (mais uma vez, usando a notação L , onde n é n

o número da linha). Essencialmente, há três coisas que você pode fazer às linhas de uma matriz sem alterar a solução do sistema de equações que ela representa:

Mover as linhas. Se quiser que a segunda linha seja, de fato, a primeira e vice-versa, então que seja assim – só troque seus lugares. É claro, você não pode mover elementos individuais; é preciso mover a linha inteira. Isso é permitido porque um sistema de equações terá a mesma solução, não importe em que ordem as equações são listadas.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 252

22/05/2014 14:54:07



Capítulo 18: A Enigmática Pílula Vermelha de Aplicações de Matrizes 253

Desse modo, os sistemas de equações a seguir terão a mesma solução:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

| 2

5 14 |

| 4 -2 -8 |

Indique essa troca de linhas escrevendo “ $L L$ ” ou “ $L L$ e $L L$ ”.

1

2

1

2 2

1

Multiplicar qualquer linha por

uma constante (exceto 0). Você

fez isso todas as vezes pelo método

Alerta do Kelley

de eliminação e ele funciona bem

Sempre que você faz

com matrizes, também. Digamos que

uma operação com linhas em uma

você tenha a seguinte matriz 3×3 :

matriz aumentada, a linha *inteira*

(incluindo os lados esquerdo e direito

| 3 -1

2 6 |

da linha pontilhada) é afetada.

5 7

4

2

$\left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 7 & -4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{array} \right]$

8

0 - 5 $\left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 7 & -4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{array} \right]$

Se você quiser, pode multiplicar a primeira linha por -5; use a notação $-5 L_1, 1$

1

para deixar explicitamente claro que tudo o que você está fazendo é multiplicar a linha inteira por -5 e reescrever a linha com os resultados. Você acabará com a matriz a seguir:

$\left[\begin{array}{cc|cc} -5(3) & -5(-1) & -5(2) & -5(6) \\ -15 & 5 & -10 & -30 \end{array} \right]$

$\left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 7 & -4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 7 & -4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{array} \right]$

$\left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 7 & -4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{array} \right]$

Somar duas linhas e substituir uma delas pelo resultado. Como

com a operação com linhas anterior, isso é baseado no método de eliminação. Embora possa parecer estranho substituir completamente uma linha por uma soma dela e outra linha, é perfeitamente válido. Considere a matriz aumentada a seguir: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -11 & 1 \\ 0 & -5 & 6 & -4 \end{array} \right]$

6

11

$- \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -11 & 1 \\ 0 & -5 & 6 & -4 \end{array} \right]$

|

|

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -11 & 1 \\ 0 & -5 & 6 & -4 \end{array} \right]$

$-$

-4

$3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -11 & 1 \\ 0 & -5 & 6 & -4 \end{array} \right]$

Some as duas linhas e escreva o resultado na segunda linha ($L + L$):

2

2

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -11 & 1 \\ 0 & -5 & 6 & -4 \end{array} \right]$

1

6

11

$- \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -11 & 1 \\ 0 & -5 & 6 & -4 \end{array} \right]$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -11 & 1 \\ 0 & -5 & 6 & -4 \end{array} \right]$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -11 & 1 \\ 0 & -5 & 6 & -4 \end{array} \right]$

|

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -11 & 1 \\ 0 & -5 & 6 & -4 \end{array} \right]$

$$- +3$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \end{bmatrix}$$

As operações da segunda e da terceira linha normalmente são feitas simultaneamente. Considere esta matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$6$$

$$11$$

$$\begin{bmatrix} - \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} | \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} | \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$3 \end{bmatrix}$$

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 253

22/05/2014 14:54:08



254 Parte 5: Matrizes e Montagem Matemática

Faça a operação $5L + LL$, significando 1

$$2$$

$$2$$

Ponto Crítico

que você deve multiplicar a primeira

O objetivo da operação

linha por 5, somar à segunda linha e

$$5L + L$$

L é modificar o

1

2

2

substituir a segunda linha pelo resultado.

elemento a para 0. Talvez

21

Esta é a parte complicada: você não quer

você não saiba porque isso

que a primeira linha mude, embora esteja

é importante no momento,

multiplicando-a por 5 para reescrever

mas é um passo essencial

a segunda linha. Desse modo, você

na reescritura da matriz na forma

deve fazer toda a multiplicação e soma

escalonada por linhas.

funcionar ao mesmo tempo dentro da

segunda linha:

[

1

6

-11] [1 6 -11]

| 5

| = |

|

[(1) + -

(5) 5 6() + -(4) 5 (1-1) 3+] [0 26 5-2]

Você Tem Problemas

Problema 1: Faça as operações com linhas a seguir:

a. - 6 L → L para

2 2

b. - 3 L + L →

L para

1

2

2

Forma Escalonada por Linhas

Está na hora de arregaçar as mangas, apertar o capuz pensante, prender o laço da gravata do conhecimento e levantar as calças da intuição. Aqui está o ponto principal de todo o capítulo: reescrever matrizes de duas formas reduzidas diferentes. Essencialmente, você sacode uma matriz usando operações com linhas até que ela atenda aos requisitos da forma que você procura.

A primeira das duas formas é a *forma escalonada por linhas* (o processo é denominado

“*eliminação Gaussiana*”) e requer que uma matriz atenda uma das condições a seguir:

Os elementos na diagonal da matriz devem ser todos 1. Com isso, quero dizer a diagonal do canto esquerdo superior da matriz até o canto direito inferior, contendo elementos a , a , a e assim por diante.

11

12

13

Todos os elementos nas colunas abaixo da diagonal devem ser 0. Depois que uma matriz está na forma escalonada por linhas, parece que a diagonal de 1s corta a matriz de noroeste a sudeste, deixando os números acima da diagonal e zeros abaixo.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 254

22/05/2014 14:54:09



Capítulo 18: A Enigmática Pílula Vermelha de Aplicações de Matrizes
255

Se uma linha não contém nada além de elementos 0, coloque-a na parte inferior. Você não terá que fazer isso muito frequentemente. É bem incomum.

O melhor jeito de aprender esse procedimento é dirigir-se à direita e tentar. Então, siga adiante comigo no

Alerta do Kelley

próximo exemplo. Tomarei uma matriz

A forma escalonada

3×4 aumentada e colocarei a matriz do

por linhas requer muita prática. Faça

coeficiente (a parte 3×3 dela à esquerda

exemplos suficientes de seu livro—

da linha pontilhada) na forma escalonada

texto para que o processo se torne

por linhas. É claro que, quaisquer que

natural e você não fique perguntando

sejam as operações com linhas que eu

constantemente a si mesmo, “Qual é

escolher, elas afetarão também as coisas à

o próximo passo?”.

esquerda da linha pontilhada.

Exemplo 1: Reescreva a matriz

na forma escalonada

por linhas.

Solução: Seu primeiro objetivo é definir o elemento a como igual a 1. Agora ele é 2, 11

então multiplique a linha inteira por

Como Você Fez Isso?

Se você precisar de ajuda com os tópicos deste capítulo e mesmo se não precisar, vá até o site gratuito (em inglês) que tem um kit de ferramentas de álgebra linear (o “Linear Algebra Toolkit”, www.math.odu.edu/~bogacki/lat/), escrito por Przemyslaw Bogacki, professor da Old Dominion University, em Virgínia.

Você pode inserir qualquer matriz (a interface é muito simples), ela fará não somente tudo o que você quer – como calcular determinantes por expansão, encontrar matrizes inversas e colocar matrizes na forma escalonada por linhas reduzida e normal – como também *mostrará a você como dar cada passo*.

PF_CG_TCIG_Pre-Calculus.indb 255

22/05/2014 14:54:10

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 3(1)+(-3) & 3(3)+(-1) & 3(-2)+2 & 3(-8)+(-2) \\ 4 & 0 & 10 & 13 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & 8 & -4 & -26 \\ 4 & 0 & 10 & 13 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & 8 & -4 & -26 \\ -4(1)+4 & -4(3)+0 & -4(-2)+10 & -4(-8)+13 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & 8 & -4 & -26 \\ 0 & -12 & 18 & 45 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ \frac{1}{8}(0) & \frac{1}{8}(8) & \frac{1}{8}(-4) & \frac{1}{8}(-26) \\ 0 & -12 & 18 & 45 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{13}{4} \\ 0 & -12 & 18 & 45 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{13}{4} \\ 12(0)+0 & 12(1)+(-12) & 12\left(-\frac{1}{2}\right)+18 & 12\left(-\frac{13}{4}\right)+45 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{13}{4} \\ 0 & 0 & 12 & 6 \end{array} \right]$$

256 Parte 5: Matrizes e Montagem Matemática

Agora que $a = 1$, use isso para mudar a para 0. Multiplique a linha L

inteira pelo 11

21

1

oposto do elemento a e adicione o resultado na segunda linha ($3L + L$): 21

1

2

2

Continue abaixo da primeira coluna, mudando o próximo elemento (a) para 0

31

por meio do mesmo método: multiplique L pelo oposto de a e então adicione o 1

31

resultado à terceira coluna ($-4L + LL$): 1

3

3

Agora, a primeira coluna está resolvida – ela tem um 1 no local da diagonal correta e 0s (“zeros”, “vários zeros”) abaixo – então vá até a segunda coluna. Mais uma vez, seu primeiro objetivo é obter um 1 na diagonal, o que significa que $a = 8$ precisa se 22

tornar 1. Multiplique a linha pela recíproca de a

22

L

L :

Agora que 1 está no local ao qual pertence na segunda coluna, use-o para mudar o elemento abaixo dele ($a = -12$) para 0, por meio da operação nas linhas 32

$12L + LL:$

2

3

3

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 256

22/05/2014 14:54:11



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{13}{4} \\ \frac{1}{12}(0) & \frac{1}{12}(0) & \frac{1}{12}(12) & \frac{1}{12}(6) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{13}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

Capítulo 18: A Enigmática Pílula Vermelha de Aplicações de Matrizes

257

Ponto Crítico

Os passos para a forma escalonada por linhas seguem um padrão definido.

Começando pela coluna mais à esquerda, você muda o elemento da diagonal adequada para 1, usa-o para mudar os elementos abaixo dele para 0 e então passe para uma coluna à direita e comece novamente. Você terminou quando a diagonal estiver concluída.

Agora que a segunda coluna está terminada (ela tem um 1 na diagonal e 0 abaixo), vá para a última coluna. Mude $a = 12$ para 1 para completar a diagonal 33

L

$L :$

Não há elementos abaixo de a que precisam ser mudados para 0 – você atingiu o 33

fim da diagonal, o canto direito inferior da matriz de coeficientes. Você terminou.

Você Tem Problemas

—

$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

Problema 2: Reescreva a matriz $\begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ na forma escalonada por linhas.

$2 -$

$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

1

$1 \begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Forma Escalonada Reduzida por Linhas

Hoje em dia, a maioria dos alimentos tem uma versão “baixa em alguma coisa” –

leite integral ou leite desnatado, biscoitos com muito ou pouco carboidrato, Coca-

-Cola normal, Coca-Cola *Diet*, Coca-Cola sem cafeína, Coca-Cola sabor limão, Coca de café com leite de baunilha com metade da cafeína, expresso adicional e muita espuma mas sem chantili e sem cebolas. Uma única versão de um produto já não é mais suficiente, então, por que não abraçar uma versão “baixa em constates” da forma escalonada por linhas?

Como o nome sugere, colocar uma matriz na forma *escalonada reduzida por linhas* (também denominada eliminação de Gauss-Jordan)

vai alguns passos além com o resultado da forma escalonada reduzida, criando uma matriz que contém mais zeros
PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 257

22/05/2014 14:54:12

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{13}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ \frac{1}{2}(0)+0 & \frac{1}{2}(0)+1 & \frac{1}{2}(1)-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{13}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$





258 Parte 5: Matrizes e Montagem Matemática

do que continha originalmente. Aqui está a diferença principal entre as formas: embora todos os elementos de uma matriz abaixo da diagonal de 1s na forma escalonada reduzida por linhas sejam 0, todos os elementos *acima* da diagonal de 1s também são 0 na forma escalonada reduzida por linhas.

Na forma escalonada por linhas você começou no canto superior esquerdo, forçou os elementos da diagonal a serem 1s e então usou esses 1s

Fale a Linguagem

para mudar os elementos abaixo para 0s. A

Uma matriz na **forma**

forma escalonada reduzida por linhas começa

escalonada por linhas tem uma

exatamente onde a forma escalonada por linhas

diagonal que contém todos os 1s,

termina. Você começa no canto inferior direito

começando pelo canto esquerdo

(no fim da outra diagonal) e usa os 1s para mudar

superior, e todos os elementos abaixo

os elementos acima dos 0s. Basicamente o mesmo

dessa diagonal devem ser 0s. Se os

processo de antes, só que numa direção diferente.

elementos acima da diagonal também

O exemplo a seguir continua de onde o anterior

forem 0s, a matriz está na **forma**

(Exemplo 1) parou. Ele transforma a matriz

escalonada reduzida por linhas.

(já na forma escalonada por linhas) na forma

escalonada reduzida por linhas.

Exemplo 2: Reescreva a matriz na forma escalonada reduzida por linhas: **Solução:** Comece com o 1 no canto direito inferior. Seu primeiro objetivo é eliminar o elemento diretamente acima dele, . Para conseguir fazer isso, multiplique

L pelo oposto de a e substitua L pela soma de L e L

:

3

23

2

2

3

L L

L

Ponto Crítico

Se você estiver com comichão de tanta vontade de praticar a redução para a forma escalonada por linhas de uma matriz 3×4 , vá até o Capítulo 19. Você encontrará mais problemas de prática de matrizes por lá (e praticará com problemas em outros capítulos também).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2(0)+1 & 2(0)+3 & 2(1)+(-2) & 2\left(\frac{1}{2}\right)+(-8) \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3(0)+1 & -3(1)+3 & -3(0)+0 & -3(-3)+(-7) \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

Capítulo 18: A Enigmática Pílula Vermelha de Aplicações de Matrizes 259

Mude $a = -2$ para 0 usando uma operação com linhas similar, $(2L + L)$: 13

3

1

1

Agora que todas as constantes, na terceira coluna, estão corretas, vá para a esquerda até a segunda coluna. É necessário um 0 no local de a , acima da diagonal.

12

Multiplicar L pelo oposto de a e somar as duas primeiras linhas deve fazer com que 2

12

o truque funcione $(-3L + LL)$:

2

1

1

Você Tem Problemas

Problema 3: Até o fim do Problema 2, você terá chegado a uma matriz na forma

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array} \right]$

3

3

—

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array} \right]$

escalonada por linhas: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array} \right]$

4

4 $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array} \right]$; coloque essa matriz na forma escalonada

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array} \right]$ 0

1

1

— $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array} \right]$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array} \right]$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array} \right]$

reduzida por linhas.

Por que Mesmo as Formas Escalonadas

por Linhas Existem?

Você deve estar se perguntando por que as formas escalonadas reduzidas por linhas de matrizes são remotamente úteis (e se não estiver, eu estou me perguntando por que você não está se perguntando por que elas não seriam). Na verdade, a resposta é simples, mas antes de dizer a você qual é, por favor, resolva este sistema de equações: Parece que dá muito trabalho, não é mesmo? Não vou mentir para você, é uma tonelada de trabalho. Depois de muitas substituições, o problema não chega a ficar mais fácil, e se

22/05/2014 14:54:14

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -4 & -16 \\ -3 & -1 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 10 & 13 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{13}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$



a tentar, de fato, terminar. Por sorte, a violência contra o olho não é necessária nesse caso (raramente é). O fato é que você já resolveu

Alerta do Kelley

exatamente esse sistema antes e quase resolveu

Esse sistema contém três

duas vezes.

variáveis, diferentemente dos sistemas

Pegue todos os números desse sistema e crie

que você resolveu em álgebra. Assim,

uma matriz aumentada 3×4 , consistindo de

a solução deve conter as três variáveis

uma matriz de coeficientes 3×3 (x 's na coluna

e normalmente é escrita (x, y, z) .

1, y 's na coluna 2 e z 's na coluna 3) à esquerda e uma matriz constante 3×1 à direita, separada

por uma linha pontilhada:

Parece familiar? Esta é a matriz dos exemplos 1 e 2 neste capítulo. Até o fim do Exemplo 1, você tinha esse menino mau na forma escalonada por linhas: Esta matriz fornece os coeficientes de um sistema inteiramente novo de equações (com coeficientes x , y e z ainda na primeira, segunda e terceira colunas, respectivamente): É muito mais fácil resolver isso do que a versão original do sistema. Você já sabe a que z é igual. Tudo o que resta é encontrar x e y usando a substituição. Comece substituindo z na segunda equação no novo sistema: PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 260

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$



Capítulo 18: A Enigmática Pílula Vermelha de Aplicações de Matrizes

261

Agora substitua y e z na primeira equação do novo sistema: Assim, a solução para o sistema é $2, -3, 1$

,

(2). É claro que há um pouco de trabalho

envolvido, com o tempo gasto para alcançar a forma escalonada por linhas e então substituir em duas equações diferentes, mas é melhor que não resolver o sistema, ou resolvê-lo e perder um olho. Você sabe o que seria melhor ainda? Não ter que substituir.

No Exemplo 2, você terminou o que o Exemplo 1 havia começado e colocou o sistema original de equações na forma escalonada reduzida por linhas. Caso você esqueça, é com isto que você termina: A resposta para o sistema está bem sentadinha lá, olhando fixo para seu rosto. Como vovó costumava dizer, se fosse uma cobra, teria mordido você agora. (Minha avó sempre explicava as coisas em termos de répteis, mas, ei, é por isso que a amávamos.) Leia a solução desde a parte superior até a inferior na coluna mais à direita: $2, -3, 1$

(2). Ah, há um motivo para a forma escalonada por linhas, e uma razão melhor ainda para a forma escalonada reduzida por linhas: elas permitem que você resolva qualquer sistema de equações usando operações com linhas simples.

Matrizes Inversas

Nada é para sempre; nem mesmo a poderosa matriz, vigorosa em sua construção retangular, com paredes

Fale a Linguagem

com suporte de aço reforçado, é Quando a matriz A é completamente invulnerável. Assim multiplicada por sua **matriz inversa**, como um número somado ao seu A^{-1} , o resultado é a matriz identidade. oposto desaparece (com uma soma Observe que a notação de uma matriz 0 , a identidade aditiva) e um número inversa usa o -1 pequeno elevado que multiplicado por seu recíproco cancela você também usava para denotar a (virando 1 , a identidade multiplicativa), inversa de uma função $f^{-1}(x)$. uma matriz multiplicada por sua *matriz inversa* desaparecerá em uma nuvem de fumaça (tornando-se uma

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{4}(4) & \frac{1}{4}(2) & \frac{1}{4}(1) & \frac{1}{4}(0) \\ 3(1)+(-3) & 3\left(\frac{1}{2}\right)+(-1) & 3\left(\frac{1}{4}\right)+0 & 3(0)+1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -\frac{1}{2}(0)+1 & -\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}(2)+0 \\ 2(0) & 2\left(\frac{1}{2}\right) & 2\left(\frac{3}{4}\right) & 2(1) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \end{array} \right]$$

262 Parte 5: Matrizes e Montagem Matemática

Aqui estão os passos que devem ser seguidos para encontrar a matriz inversa, A^{-1} , de qualquer matriz A :

1. Aumentar a matriz com uma matriz identidade de ordem combinada.

Por exemplo, se você estiver descobrindo a inversa de uma matriz 2×2 , junte uma matriz identidade 2×2 em seu lado direito, usando uma linha pontilhada para separar as duas. Certifique-se de que as dimensões das duas matrizes combinem.

2. Coloque a matriz à esquerda (original) na forma escalonada reduzida por linhas. Certifique-se de usar todas as operações com linhas na parte da matriz à direita da linha pontilhada também.

3. Quando a matriz à esquerda é a matriz identidade, a matriz à direita é a inversa. As duas matrizes mudam quando você aplica a forma escalonada reduzida por linhas. O que antes era a matriz original se torna uma matriz identidade, e o que antes era a matriz identidade se torna a inversa.

Nem todas as matrizes têm inversas (aquelas que não têm são denominadas *singulares*), mas se uma inversa existe, esse procedimento a encontrará.

Exemplo 3: Se

, calcule A^{-1} .

Solução: Crie uma matriz aumentada

, onde I é a matriz identidade 2×2 :

Agora coloque A na forma escalonada reduzida por linhas (de modo que fique exatamente igual ao que I é agora). Seus primeiros dois passos devem ser L

L

e $3L + L$. Darei esses passos simultaneamente para economizar espaço: 1

2

2

Faça as operações com as linhas $2L$ e $L + L$ para chegar à forma escalonada 2

2

2

1

1

reduzida por linhas da matriz A :

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 262

22/05/2014 14:54:16

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{3}{2}\right) & 4(-1) + 2(2) \\ -3\left(-\frac{1}{2}\right) + (-1)\left(\frac{3}{2}\right) & (-3)(-1) + (-1)(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Capítulo 18: A Enigmática Pílula Vermelha de Aplicações de Matrizes
263

A matriz 2×2 à esquerda é a matriz inversa:

Se A e A^{-1} são realmente inversas, então $(A)(A^{-1})$ deve ser igual à

matriz identidade.

Você também deverá verificar para ver se funciona:

Parece que o problema está certo! Oba!

Você Tem Problemas

$\lceil -1$

$\rceil$

0

$\lfloor 3$

$\rfloor$

Problema 4: Calcule a matriz inversa de

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$.

1

1

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$

Resolução de Equações com Matrizes

Se você achava estranho usar matrizes para resolver sistemas de equações, vai pirar ao saber que pode encontrar equações inteiras escritas como matrizes, como esta: Embora isso seja bem estranho (talvez eu seja o único que acha que parece que os números estão passando por três campos com cercas, mas tenho o costume de divagar), você resolverá do mesmo modo como resolveria equações muito mais simples.

Se eu lhe pedisse para resolver a equação a seguir, você mal teria tempo de piscar os olhos;

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(7) + (-3)(-4) \\ 1(7) + (-1)(-4) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 11 \end{bmatrix}$$



264 Parte 5: Matrizes e Montagem Matemática

Seus instintos devem dizer para você multiplicar ambos os lados por 4. Mas por quê? Você está tentando isolar a variável usando uma inversa multiplicativa.

Qualquer número multiplicado por seu recíproco (neste caso, 4 é o

recíproco de 1), 4

desaparecerá, deixando você com $x = 12$. Aplique os mesmos princípios nas equações com matrizes. Você ainda pretende isolar a parte da variável (que é uma matriz 2×1 que contém x e y na equação que forneci), mas em vez de multiplicar o recíproco da coisa na frente dele, multiplique ambos os lados da equação pela coisa que tem a potência para cancelar uma matriz, sua matriz inversa.

Pouparei um pouco do seu trabalho informando que a matriz inversa de é

(use a técnica que aprendeu há algumas páginas para confirmar isso, caso não acredite em mim). Então, multiplique isso em ambos os lados da equação: Você já sabe que o produto das matrizes mais à esquerda será uma matriz identidade 2×2 (afinal de contas, elas são inversas), então, descubra o produto das matrizes à direita: **Alerta do Kelley**

Certifique-se de

escrever a matriz inversa à esquerda

da matriz que está tentando cancelar

e à esquerda na matriz no outro lado

Desse modo, $x = 26$ e $y = 11$.

da equação.

Você Tem Problemas

$-1 \quad -2 \quad x \quad 4$

Problema 5: Resolva a equação com a matriz

=

.

$0 \quad 2 \quad y \quad -3$

PF_CG_TCIG_Pre-Calculus.indb 264

22/05/2014 14:54:19

Capítulo 18: A Enigmática Pílula Vermelha de Aplicações de Matrizes

O Mínimo que Você Precisa Saber

As três operações básicas com linhas são a troca de linhas, a multiplicação de uma linha por uma constante e a adição de linhas.

Uma matriz A , na forma escalonada por linhas, tem uma diagonal de 1s (começando no elemento a), e todos os elementos abaixo dessa diagonal 11

devem ser 0s.

Uma matriz na forma reduzida por linhas tem a mesma diagonal de 1s como na forma escalonada reduzida por linhas, mas todos os elementos acima e abaixo dessa diagonal são 0s.

Você pode usar matrizes aumentadas e a forma escalonada reduzida por linhas para calcular uma matriz inversa.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 265

22/05/2014 14:54:19

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 266

22/05/2014 14:54:19

Capítulo 19

Teste Final

Neste Capítulo:

Medindo sua compreensão de todos os tópicos importantes de pré-cálculo

Determinando o que você precisa praticar mais

Nada ajuda a compreender a matemática tão bem como a boa e velha prática, e esse é o objetivo deste capítulo. Você pode fazer o que quiser, mas sugiro uma das três estratégias a seguir:

1. Quando terminar de ler cada capítulo, venha até aqui e trabalhe nos problemas, para praticar o conteúdo do capítulo lido.
2. Se estiver usando este livro como material adicional para uma aula que você já fez, faça este teste antes de começar a ler o livro. Então, volte e leia os capítulos que contêm os problemas que você deixou para trás. Depois de revisar esses tópicos, faça os problemas respectivos novamente.
3. Guarde este capítulo para o fim e use-o para ver o quanto você se lembra de cada tópico depois de passar algum tempo sem vê-lo.

Como esses problemas foram criados para serem praticados e não para ensinar novos conceitos, somente as respostas são fornecidas no fim de cada capítulo, sem explicações ou justificativas (diferentemente dos problemas do quadro “*Você Tem Este capítulo contém tantos problemas para praticar que, se você fizesse um por ano, teria que viver mais de 115 anos para terminá-los. Claro que se você fizer um por minuto, levará somente umas 2 horas para terminar.*”).

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 267

22/05/2014 14:54:19

268 Parte 5: Matrizes e Montagem Matemática Problemas” ao longo do livro). Ainda assim, esses problemas para prática foram desenvolvidos para espelhar os exemplos, então, você sempre pode retornar e revisar se tiver se esquecido de algo ou precisar de uma revisão adicional.

Preparado? Há muito o que praticar: mais de 115 questões, já que muitos dos 74

problemas a seguir têm várias partes. (Mas ninguém disse que você precisa fazer tudo de uma vez.)

Capítulo 1

1. Simplifique a expressão

$$8 - 44$$

$$- +$$

e identifique todos os modos como o

$$9$$

$$9$$

resultado pode ser classificado.

2. Identifique as propriedades que justificam as afirmações a seguir:

(a) $8 + (-8) = 0$

(b) $(x + 4) + (y - 3) = (y - 3) + (x + 4)$ (c) $(2x)y = 2(xy)$

3. Simplifique a expressão

$$.$$

4. Reescreva $x^{2/7}$ como uma expressão com raiz.

5. Simplifique a expressão com raiz:

$$.$$

Capítulo 2

6. Resolva a equação:

$$.$$

7. Escreva a equação da reta que passa por $(2, -7)$ e $(-4, 1)$ na forma padrão.

8. Representa graficamente a equação $x - 3y = 4$.

9. Reescreva em notação de intervalos:

(a) $x < -2$

(b) $-5 \leq y < 12$

10. Resolva a desigualdade e represente graficamente a solução: $2w - 3 \geq 4 - (w + 1)$.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 268

22/05/2014 14:54:21

Capítulo 19: Teste Final

269

11. Resolva as desigualdades e escreva as soluções em notação de intervalos: (a)

(b)

Capítulo 3

12. Classifique os polinômios a seguir

(a) $-2x^4 + 3x^2 - 5x$

(b) $x^2 - 1$

13. Simplifique a expressão $3x(x^2 - 2x - 1) - x(x - 5)$.

14. Calcule o produto e simplifique: $(2x - 3)(x^2 + 4x - 6)$.

15. Calcule o quociente: $(x^4 + 2x^2 - 3x + 1) \div (x^2 + 5x - 2)$.

16. Use a divisão sintética para calcular $(-x^3 + 4x^2 + 11x - 2) \div (x + 4)$.

17. Simplifique as expressões complexas:

(a) $(3 - 4i)(7 + i) - 2(5 - 5i)$

(b) $(4 - 2i) \div (3 + i)$

Capítulo 4

18. Descubra o máximo divisor comum de 84 e 154.

19. Fatore os polinômios completamente:

(a) $6x^2y^3z^5 + 3xy^7z^3 - 15x^4z^2$

(b) $2x^4 - 12x^3 - 5x + 30$

(c) $x^9 - 1$

(d) $28x^2 - 7$

(e) $x^2 - 8x + 15$

(f) $y^2 - 3y - 108$

(g) $6w^2 - w - 12$

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 269

22/05/2014 14:54:23

$$b(x) = 2x - 3$$

270 Parte 5: Matrizes e Montagem Matemática

Capítulo 5

20. Descubra o mínimo múltiplo comum da expressão racional:

.

21. Simplifique a expressão:

22. Calcule o produto e simplifique:

.

23. Encontre a(s) solução(ões):

.

24. Descubra e represente graficamente a solução das desigualdades:

(a) $x^2 - 15x + 54 < 0$

(b)

Capítulo 6

25. Se

e

, avalie as funções a seguir:

(a) $(hg)(4)$

(b) $(g(h(f(8))))$

26. Avalie $-8,7$.

27. Represente graficamente a função

usando transformações.

28. Se $g(x) = 3x^2 - 2$, quando $x \geq 0$, encontre $g^{-1}(x)$.

29. Determine quantas assíntotas a função

tem e forneça a

equação de cada uma.

Capítulo 7

30. Resolva as equações quadráticas usando o método indicado: (a) $x^2 + 3x = 27$ (por fatoração)

(b) $2x^2 + 16x + 7 = 0$ (completando o quadrado) (c) $5x^2 + 3x = -1$ (pela fórmula quadrática) PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 270

22/05/2014 14:54:26

Capítulo 19: Teste Final

271

31. Descreva o comportamento final da $f(x) = 6x^3 - 8x^4$.

32. Aplique a Regra dos Sinais de Descartes à função $g(x) = -x^3 + 3x^2 + 5x - 1$.

33. Identifique todas as raízes racionais possíveis da função $h(x) = 6$

$$x^3 + 4x^2 - x + 2.$$

34. Encontre todas as raízes da função $d(x) = 3x^4 - 10x^3 - 4x^2 + 13x + 4$.

Capítulo 8

35. Determine o valor de x em cada expressão logarítmica: (a) $\log 64 = x$

4

(b) $\log x = -1$

3

(c)

36. Represente graficamente a função $f(x) = \log(x + 2) - 1$.

5

37. Determine o valor do $\log 31$, arredondado em três

6

casas decimais.

38. Expanda a expressão usando as propriedades dos logaritmos:

.

39. Use as propriedades dos logaritmos para reescrever como um único logaritmo: $\log w - \log y - 3(\log 3 + \log x)$.

2

2

2

2

Capítulo 9

40. Esboce o gráfico de $j(x) = 3 - x$.

41. Resolva as equações:

(a) $2x + 3 - 3 = 5$

(b) $\log 4 - \log x = -2$

42. Num experimento, a população de bactérias tem crescimento exponencial durante um período de quatro dias. Imagine que havia 200 colônias no início do primeiro dia e que até o início do terceiro dia a população havia crescido para 335. Qual é a população no final do período de quatro dias?

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 271

22/05/2014 14:54:28

272 Parte 5: Matrizes e Montagem Matemática Capítulo 10

43. Converta 200° para radianos.

44. Converta

para graus.

45. Encontre um ângulo cômruo positivo e um negativo para

.

46. Calcule x no desenho a seguir; arredonde sua resposta até a quarta casa decimal.

47. Usando o círculo unitário e os ângulos cômruos, mas sem calculadora, avalie as funções trigonométricas:

(a) $\sin 5\pi 6$

(b)

11π

$\cos 4$

(c) $\sin 8\pi 3$

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 272

22/05/2014 14:54:29

Capítulo 19: Teste Final

273

Capítulo 11

48. Identifique o período e a amplitude da função periódica a seguir, com base em seu gráfico.

49. Esboce o gráfico de $f(x) = 2\sin(-x)$ no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

50. Avalie as seis funções trigonométricas do ângulo

.

Capítulo 12

51. Simplifique as expressões:

$$(a) (\sec x)(\operatorname{cosec} x) - (\sec(-x))(\operatorname{cosec}(-x)) \quad (b)$$

52. Verifique as identidades:

$$(a) \sin^2 x - \sin^4 x = (\cos^2 x)(\sin^2 x) \quad (b) (\operatorname{cosec}^2 \theta)(\sec^2 \theta) = 4\operatorname{cosec}^2 2\theta$$

$$(c) \sin \theta - \pi^3 - \sin \theta + \pi^3$$

$$3 \cos \theta$$

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 273

22/05/2014 14:54:30

274 Parte 5: Matrizes e Montagem Matemática Capítulo 13

53. Avalie os itens a seguir, certificando-se de que suas respostas estejam no intervalo restrito correto:

(a)

$$\arcsen \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\arcsen -$$

$$\left| \frac{2}{\sqrt{2}} \right|$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right)$$

(b) $\operatorname{arccotg} -$

(3)

54. Resolva as equações e escreva as soluções conforme indicação: (a) $2(\operatorname{tg} \theta + 1) = 3 + \operatorname{tg} \theta$ (solução geral)

$$(b) 2\cos^2 \theta - 7\cos \theta - 4 = 0 \text{ (solução exata)}$$

$$(c) \cos^2 \theta + 4\sin \theta = 3 \text{ (solução exata)}$$

$$(d) 1 + \sec \theta = \operatorname{tg} \theta \text{ (todas as soluções em } [0, 2\pi))$$

$$(e) 3 \cotg 3\theta - 1 = 0 \text{ (todas as soluções em } [0, 2\pi))$$

Capítulo 14

55. Determine o ângulo de referência de

.

56. Se a tg

e o $\cos \theta > 0$, avalie a $\sec \theta$.

57. Descubra a área de um triângulo com lados 7, 9 e 14 centímetros usando a Fórmula da Área de Heron e calcule o maior ângulo (em graus) usando a Lei dos Cossenos. (Arredonde todas as respostas até a casa do milésimo mais próxima.) 58. Dado o triângulo ABC , em que o lado $a = 5$ é oposto ao ângulo $A = 63^\circ$, descubra o comprimento ao lado oposto a $B = 50^\circ$.

59. Calcule a área do triângulo a seguir, (arredonde até a casa do milésimo).

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 274

22/05/2014 14:54:32

$$\begin{bmatrix} 2 & 11 \\ -4 & 6 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 5 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) $\begin{bmatrix} -12 & 3 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \\ -6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

Capítulo 19: Teste Final

275

Capítulo 15

60. Identifique a seção cônica:

(a) $4x^2 - 25y^2 - 24x - 50y - 89 = 0$

(b) $49x^2 + y^2 + 10y - 24 = 0$

(c) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 23 = 0$

(d) $2y^2 + x - 16y + 26 = 0$

61. Escreva a equação da parábola com foco $(-3,3)$ e diretriz $y = -5$ na forma padrão.

62. Coloque a parábola $2y^2 + x - 16y + 26 = 0$ na forma padrão, represente-a graficamente e identifique o vértice, o foco, a diretriz e o eixo de simetria.

63. Coloque o círculo $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 23 = 0$ na forma padrão, identifique seu centro e raio e represente-o graficamente.

Capítulo 16

64. Escreva a equação da elipse com um eixo menor com 8 unidades e vértices nos pontos $(-3,-5)$ e $(9,-5)$ na forma padrão.

65. Coloque a elipse $49x^2 + y^2 + 10y - 24 = 0$ na forma padrão, represente-a graficamente e identifique seu centro, focos, vértices, excentricidade e os comprimentos do eixo maior e do eixo menor.

66. Coloque a hipérbole $4x^2 - 25y^2 - 24x - 50y - 89 = 0$ na forma padrão e represente-a graficamente.

Capítulo 17

67. Calcule

68. Use atalhos para calcular os determinantes:

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 275

22/05/2014 14:54:33

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 9 & -2 & 2 \\ 7 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 4 & -9 & -1 \\ 5 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 7 & 4 & 3 \\ -1 & 8 & 2 & -6 \\ -4 & -1 & 5 & 2 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -3 & -17 \\ -9 & 4 & -1 & 12 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

69. Se

, calcule M e C

31

31.

70. Calcule

usando o método de expansão.

71. Resolva o sistema usando a Regra de Cramer:

Capítulo 18

72. Dada a matriz

, faça a operação com linhas

$$-3L + L \quad L \quad .$$

3

2

2

73. Coloque a matriz

na:

(a) Forma escalonada por linhas;

(b) Forma escalonada reduzida por linhas.

74. Resolva a equação

calculando a inversa da matriz 2×2 .

Soluções

Capítulo 1: (1) 2: números naturais, naturais com zero, inteiros, racionais, reais e complexos (você também poderia incluir positivos e ímpares); (2a) propriedade inversa aditiva; (2b) propriedade comutativa, porque é a ordem dos termos que muda, não o agrupamento; (2c) propriedade associativa da multiplicação; (3) ; (4) ou

; (5)

.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 276

22/05/2014 14:54:35

Capítulo 19: Teste Final

277

Capítulo 2: (6)

; (7) $4x + 3y = -13$; (8)

Gráfico de $x - 3y = 4$.

(9a) $(-\infty, -2)$; (9b) $[-5, 12)$; (10) $[2, \infty)$

Gráfico de $2w - 3 \geq 4 - (w + 1)$.

(11a) (–

[1 7]

$\infty, -5)$ ou $(-1, \infty)$; (11b) $-$,

|| 6 6 ||

Capítulo 3: (12a) trinômio quadrático; (12b) binômio quadrático;
(13) $3x^3 - 7x^2 + 2x$; (14) $2x^3 + 5x^2 - 24x + 18$; (15) $x^2 - 5x + 29 +$

;

(16) $-x^2 + 8x - 21 +$, (17a)

; (17b)

Capítulo 4: (18) 14; (19a) $3xz^2(2xy^3z^3 + y^7z - 5x^3)$; (19b) $(2x^3 - 5)(x - 6)$; (19c) $(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1)$. Dica: fatore a diferença de cubos perfeitos para obter $(x^3 - 1)(x^6 + x^3 + 1)$ e fatore $(x^3 - 1)$ novamente, como a diferença de cubos perfeitos; (19d) $7(2x + 1)(2x - 1)$; (19e) $(x - 3)(x - 5)$; (19f) $(y - 12)(y + 9)$; (19g) $(3w + 4)(2w - 3)$.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 277

22/05/2014 14:54:40

278 Parte 5: Matrizes e Montagem Matemática Capítulo 5: (20) $(x + 3)(x - 3)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$; (21) ; (22)

(23)

; (24a) (6,9)

Gráfico de $-15x + 54 < 0$.

(24b) $[-10, 6)$

Gráfico da solução de $x - 2$

$x + 6 \geq 3$

Capítulo 6: (25a) 52; (25b) 3; (26) -9; (27)

7

Gráfico de $f(x) = 1x - 2$

(28)

; (29) três assíntotas: $x = -2$, $x = 5$ e $y = x + 3$

Capítulo 7: (30a)

; (30b)

;

(30c)

; (31) as extremidades direita e esquerda do gráfico

apontam para baixo; (32) $g(x)$ tem duas ou zero raízes positivas e $g(x)$ tem exatamente uma raiz negativa; (33)

,

;

(34) -1, 4

3

13 3

13

,

+

—

—1

,

3

2

2

.

Capítulo 19: Teste Final

279

Capítulo 8: (35a) 3; (35b) 13; (35c) 4; (36)

Gráfico de $f(x) = \log(x + 2) - 1$.

5

(37) 1,917; (38)

; (39)

Capítulo 9: (40)

Gráfico de $j(x) = 3 - x$.

(41a) $x = 0$; (41b) $x = 400$; (42) aproximadamente 561 colônias.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 279

22/05/2014 14:54:45

280 Parte 5: Matrizes e Montagem Matemática Capítulo 10: (43)

; (44) 432° ; (45)

; (46) $x = 12,293$; (47a) 1; (47b)

2

2

—

; (47c)

3.

2

– 2

Capítulo 11: (48) período = 8; amplitude = 3; (49)

Gráfico de $f(x) = 2\text{sen}(-x)$.

(50)

sen

tg indefinida, cotg

é indefinida,

cossec

.

Capítulo 12: (51a) $2\sec x \cossec x$; (51b) $\text{tg } \theta$; (52a)

Fatore $\text{sen}^2 x$ do lado esquerdo: $\text{sen}^2 x(1 - \text{sen}^2 x) = (\cos^2 x)(\text{sen}^2 x)$
Substitua $(1 - \text{sen}^2 x)$ pelo $\cos^2 x$ (identidade

pitagórica): $\text{sen}^2 x (\cos^2 x) = (\cos^2 x)(\text{sen}^2 x)$

Propriedade comutativa da multiplicação: $(\cos^2 x)(\text{sen}^2 x) = (\cos^2 x)(\text{sen}^2 x)$ (52b)

Aplique as identidades recíprocas: sen

sen

Faça a regra de três da proporção: $4\text{sen}2\theta \cdot \cos2\theta = \text{sen}22\theta$

Aplique a fórmula do ângulo duplo: $4\text{sen}2\theta \cdot \cos 2\theta = (2\text{sen}\theta\cos\theta)^2$

Verifique o quadrado do lado direito: $4\text{sen}2\theta \cdot \cos 2\theta = 4\text{sen}2\theta \cdot \cos 2\theta$

Capítulo 19: Teste Final

281

(52c)

Aplique as sen

sen

sen

sen

fórmulas da soma

e da diferença:

Avalie as funções

sen

sen

trigonométricas:

Simplifique:

Capítulo 13: (53a) ; (53b) ; (54a)

, onde k é um número

inteiro (você também poderia escrever

; (54b)

;

(54c) $\theta = \arcsen(2 - 2) \approx 0,626$; (54d) $\theta = 0, \pi$;

(54e)

.

Capítulo 14: (55) ; (56)

; (57) Área = $12 \cdot 5 \approx 26,833$; ângulo maior =

121,588°; (58) $b = 4,299$; (59) 16,712

Capítulo 15: (60a) hipérbole; (60b) elipse; (60c) circunferência; (60d) parábola; 47

(61)

; (62) $x = -2(y - 4)^2$, vértice = (6,4), foco = (8,4), diretriz:

, eixo de simetria: $y = 4$

O gráfico de $2y^2 + x - 16y$

$+ 26 = 0$.

(63) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 36$, centro = (-2,3), raio = 6

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 281

22/05/2014 14:54:52

282 Parte 5: Matrizes e Montagem Matemática *Gráfico de*

$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 23 = 0$.

Capítulo 16: (64)

; (65)

, centro = (0,-5),

focos = (0, -5 - 4) e (0, -5 + 4), vértices = (0,2) e (0,-12),
excentricidade =

$\frac{4}{3}$

, o eixo maior tem 14 unidades de comprimento, o eixo menor

$e \approx 0.990$

tem 2 unidades

Gráfico de $49x^2 + y^2 +$

$10y - 24 = 0$.

(66)

22/05/2014 14:54:53

$$\begin{bmatrix} -8 & 13 \\ -10 & -4 \\ 21 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 7 & 4 & 3 \\ 11 & 11 & -13 & -12 \\ -4 & -1 & 5 & 2 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{13} & -\frac{29}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

Capítulo 19: Teste Final

283

Gráfico de $4x^2 - 25y^2 -$

$$24x - 50y - 89 = 0.$$

Capítulo 17: (67)

; (68a) 21; (68b) -2; (69)

; (70) 271;

(71) (3,-8)

Capítulo 18: (72)

; (73a)

;

(73b)

; (74)

, solução = (-2,-1)

ApêndiceA

Soluções dos Quadros

“Você Tem Problemas”

Aqui estão soluções detalhadas para todos os quadros “Você Tem Problemas”. Sugiro que você volte aqui para olhar as respostas somente depois de ter tentado ao máximo e ter ficado totalmente sem esperanças de seguir adiante; você deverá encontrar informações suficientes para ultrapassar todas as etapas importantes ou difíceis.

Não leia o problema e volte aqui para ler a resposta! Se você *resolver o problema sozinho primeiro*, dominará o conceito de verdade.

Capítulo 1

1. Números racionais, reais e complexos. Para combinar -5 e 2 , é necessário 3

primeiro obter os denominadores comuns: 15 2

13

—

+ = —

3 3

3 . Como o resultado

é negativo, não pode ser um número natural nem um número natural com zero. Como é uma fração, 13

—

não é inteiro, mas definitivamente é racional.

3

Todo número racional é automaticamente um número real e todo o

número real é automaticamente complexo.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 285

22/05/2014 14:54:55

286 Apêndice A

2. (a) Propriedade simétrica. Os lados da equação são invertidos.

(b) Propriedade comutativa da multiplicação. A ordem dos números mudou.

(c) Propriedade distributiva. O 4 é multiplicado por um conjunto de parênteses.

(d) Propriedade inversa da multiplicação. Todo o número multiplicado por seu recíproco é igual a 1.

3.

. Comece dentro dos parênteses e subtraia as potências das bases comuns: $(x^3 - 7y^5 - 2) - 2 = (x^3 - 4y^3) - 2$. Multiplique cada expoente nos parênteses por -2 : $x^8 y^{-6}$.

Por fim, reescreva a resposta sem um expoente negativo.

4. (a) y . Embora a expressão seja tecnicamente igual a

, o índice 2 e o

expoente 1 estão implícitos.

(b)

ou

; ambas as expressões são iguais e corretas.

5. (a) 1024. Reescreva como uma expressão com raiz:

5

$165^{2/5} =$

5

$(16)^{1/5}$. Simplifique

a expressão $(16)^{1/5} =$

4 $4^5 = 1024$.

(b)

. Simplifique cada radical:

Como todos os índices e radicandos são equivalentes, combine os coeficientes $(2 + 3 - 1 = 4)$.

Capítulo 2

1. $x = -6$. Distribua -5 :

. Subtraia e adicione 30 em ambos

os lados da equação:

. Multiplique ambos os lados por 3

—

para

17

isolar x :

. Simplifique para obter $x = -6$.

2. $y = -6x - 45$. A inclinação de v é

. Como v e w são paralelos,

suas inclinações são iguais. Use $m = -6$ e $(a, b) = (-7, -3)$ na forma inclinação-coeficiente angular e simplifique:

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 286

22/05/2014 14:55:00

Soluções dos Quadros “Você Tem Problemas”

287

Resolva para y para colocar esta resposta na forma inclinação-coeficiente angular.

3. Substituir $x = 0$ dá a você $-3y = -5$, então

. Definir $y = 0$ resulta em $x = -5$.

Indique os pontos 0 5

,

(3) e (5,0) e conecte os pontos para obter o gráfico a seguir: 4. (a) $[-1, \infty)$. O limite inferior é finito e incluído e o limite superior é infinito.

(b) (9,13]. O limite superior está incluído e o inferior não está.

(c) $(-\infty, 4)$ ou $(4, \infty)$. Se x não pode ser 4, deve ser menor que 4 ou maior que 4.

Traduza essas duas afirmações ($x < 4$ ou $x > 4$) em intervalos.

5.

. Distribua o 9 e, então, subtraia 9 y de ambos os lados da desigualdade:

$-4y \leq 18$. Divida ambos os lados por -4 , lembrando-se de inverter o sinal de desigualdade, já que está dividindo por um número negativo:

. O

gráfico é uma reta numérica com um ponto cheio em e uma seta escura apontando à direita daquele ponto final.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 287

22/05/2014 14:55:01

288 Apêndice A

6. (a) $x \geq 7$ ou $x \leq 3$. Subtraia 1 de cada lado: $|x - 5| \geq 2$.
Reescreva como duas desigualdades: $x - 5 \geq 2$ ou $x - 5 \leq -2$. Resolva cada uma separadamente.

(b)

. Isole os valores absolutos adicionando 4 aos dois lados:

Agora, reescreva como uma desigualdade composta: $-4 < 3x < 4$.

Divida tudo por 3 para resolver.

Capítulo 3

1. (a) Monômio cúbico. Há um único termo, que é elevado à terceira potência.

(b) Trinômio quadrático. Há três termos e o expoente mais alto é 2.

(c) Binômio linear. O grau desse polinômio com dois termos é 1.

2. $-12x^2 - 3x + 5y^2 + 10y - xy$. Distribua $-3x$ e $5y$ nos conjuntos de parênteses correspondentes: $-12x^2 + 9xy - 3x - 10xy + 5y^2 + 10y$. Os únicos termos semelhantes na expressão inteira são $9xy$ e $-10xy$; combine-os para obter $9xy - 10xy = -xy$ e deixe os outros

termos sozinhos.

3. $-2a^3 - 9a^2b + 43ab^2 - 20b^3$. Distribuir primeiro $-2a$ e depois $5b$ no polinômio à direita, resultando nisto:

$$(-2a)(a^2) + (-2a)(7ab) + (-2a)(-4b^2) + (5b)(a^2) + 5b(7ab) + 5b(-4b^2)$$

$$= -2a^3 - 14a^2b + 8ab^2 + 5a^2b + 35ab^2 - 20b^3$$

Não esqueça de somar os expoentes das bases comuns ao multiplicar.
É

por isso que $(-2a)(7ab) = -14a^{1+1}b = -14a^2b$.
Finalmente combine os termos semelhantes e simplifique.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 288

22/05/2014 14:55:03

$$\begin{array}{r} \underline{2} \big| \quad 1 \quad -6 \quad 2 \quad 0 \quad -5 \\ 2 \quad -8 \quad -12 \quad -24 \\ \hline 1 \quad -4 \quad -6 \quad -12 \quad -29 \end{array}$$

Soluções dos Quadros “Você Tem Problemas”

4.

. Note que é necessário adicionar $0x^2$ ao dividendo conforme organiza o problema.

$$x^3 + 0x^2 - 9x - 4x - 3$$

$$-x^3 + 3x^2x^2 + 3x3x^2 - 9x$$

$$-3x^2 + 9x$$

$$0 - 4$$

Como você não pode multiplicar x por nada para obter -4 , está feito.
O

quociente é $x^2 + 3x$ e o resto é -4 .

5.

. Lembre-se de escrever o oposto da constante do

divisor no quadro: 2, não -2. Como o dividendo não tem termo x , certifique-se de que tenha um 0 no lugar do x da lista de coeficientes:

6. Para calcular $c + d$, combine os termos semelhantes $(1 - 6i) + (4 + 3i) = 5 - 3i$. É

necessário distribuir -1 para a subtração $c - d$: $(1 - 6i) - (4 + 3i) = 1 - 6i - 4 - 3i$

$$= -3 - 9i.$$

Multiplique c e d para obter $4 + 3i - 24i - 18i^2$. Ao combinar termos semelhantes, não esqueça que $i^2 = -1$; você obterá uma resposta de $22 - 21i$.

Este é o trabalho do quociente de $c \div d$:

Capítulo 4

1. $22 \cdot 32 = 36$. A decomposição por fatores primos de 72 é $2^3 \cdot 3^2$, e 180 é fatorado em $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, como você pode ver nas árvores de fatoraçoão a seguir.

PF_CG_TCIG_Pre-Calculus.indb 289

22/05/2014 14:55:04

$$-3a^2bc^2 \left(\frac{-18}{-3} a^{3-2} b^{5-1} c^{2-2} + \frac{-9}{-3} a^{2-2} b^{3-1} c^{7-2} + \frac{-6}{-3} a^{3-2} b^{1-1} c^{5-2} \right)$$

290 Apêndice A

Os fatores comuns são 2 e 3; então, compare os expoentes e use o menor dos dois para cada. Isso significa 22 em vez de 23; e não se esqueça de 32 (ambas as fatoraçoões contém isso, então, não há necessidade de escolher o expoente de 3 a ser usado). Multiplique para obter o máximo divisor comum.

2. $-3a^2bc^2(6ab^4 + 3b^2c^5 + 2ac^3)$. O máximo divisor comum dos coeficientes é 3, mas, como todos os termos são negativos, faça -1

· 3 = -3. Todos os termos contêm a , b e c , então, escolha o menor expoente de cada: a 2, b e c 2. Isso dá o máximo divisor comum de $-3a^2bc^2$. Agora, escreva o polinômio na forma fatorada e simplifique:
 3. $(2w - 3)(5x - 6y)$. Reescreva o polinômio emparelhando seus dois primeiros e dois últimos termos: $(10xw - 15x) + (-12wy + 18y)$. Fatore cada par separadamente: $5x(2w - 3) + 6y(-2w + 3)$. Como os binômios são opostos, fator um -1 do segundo para obter $5x(2w - 3) - 6y(2w - 3)$. Para terminar, fator o binômio comum.

4. (a) $3(x^2 + 4y^2)(x + 2y)(x - 2y)$. Comece com o máximo divisor comum: $3(x^2 - 16y^2)$. Dentro dos parênteses você tem a diferença dos quadrados perfeitos: $3(x^2 + 4y^2)(x^2 - 4y^2)$. Não acabou – observe que $(x^2 - 4y^2)$ é outra diferença de quadrados perfeitos; então, fator em $(x + 2y)(x - 2y)$.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 290

22/05/2014 14:55:05

$$\frac{x^2}{(x-2)(x-1)} + \frac{x-2}{(x-1)^2} - \frac{5x^2}{(x+5)(x-2)}$$

$$\frac{28x + 11}{12x + 15}$$

$$\frac{28x + 11}{12x + 15}$$

$$\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{x(4x+5)}{x(4x+5)} - \frac{x-1}{3(4x+5)} \cdot \frac{x}{x} + \frac{7x^2}{x(4x+5)} \cdot \frac{3}{3}}{\frac{2x(4x+5) - x(x-1) + 3 \cdot 7x^2}{3x(4x+5)}}$$

$$\frac{8x^2 + 10x - x^2 + x + 21x^2}{3x(4x+5)} = \frac{28x^2 + 11x}{3x(4x+5)} = \frac{\cancel{x}(28x+11)}{3\cancel{x}(4x+5)} = \frac{28x+11}{12x+15}$$

$$\frac{4x^3 - 12x^2}{x^2 + 4x + 3}$$

$$\frac{4x^3 - 12x^2}{x^2 + 4x + 3}$$

$$\frac{\frac{x(2x-3)}{(x+3)(x+3)} \cdot \frac{4x(x^2-9)}{(2x-3)(x+1)}}{\frac{x\cancel{(2x-3)}(4x)\cancel{(x+3)}(x-3)}{(\cancel{x+3})(x+3)\cancel{(2x-3)}(x+1)}} =$$

(b) $(r - 5)(r^2 + 5r + 25)$. Você tem a diferença dos cubos perfeitos, então use a fórmula correspondente com $a = r$ e $b = 5$:

$(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ $(r^3 - 5^3) = (r - 5)(r^2 + (r)(5) + (5)^2)$ 5. (a) $(y + 3)(y + 4)$. Os números 3 e 4 somam 7 e têm um produto 12.

(b) $3(x + 7)(x - 4)$. Comece fatorando o máximo divisor comum: $3(x^2 + 3x - 28)$. Somente os números 7 e -4 resultam em 3 quando somados e em 28 quando multiplicados. Tenha cuidado para não inverter os sinais e usar os números -7 e 4, pois a soma ficaria incorreta: $-7 + 4 = -3$, não 3.

6. $(x + 2)(3x - 4)$. Os únicos dois números que têm uma soma de 2 e um produto de -24 são -4 e 6. Reescreva o coeficiente de x e distribua o x para obter $3x^2 - 4x + 6x - 8$. Fatore por agrupamento: $x(3x - 4) + 2(3x - 4) = (3x - 4)(x + 2)$.

Capítulo 5

1. $(x - 2)(x - 1)^2(x + 5)$. Fatore os denominadores (usando o método do Capítulo 4, na seção “Fatoração de Trinômios Quadráticos” para obter

. (Note que $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1) =$

$(x - 1)^2$, na segunda fração.) Os fatores exclusivos são $(x - 2)$, $(x - 1)$ e $(x + 5)$; use a potência maior de cada um para construir o mínimo múltiplo comum – a ordem dos fatores não importa.

2.

. O mínimo múltiplo comum da expressão é $3x(4x + 5)$. Reescreva cada fração com esse denominador:

Combine os numeradores e simplifique para obter a resposta final.

3.

. Fatore e então multiplique as frações:

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 291

22/05/2014 14:55:06

$$\frac{ab^2 + ab + a - b^2 - b - 1}{a + 4}$$

$$\frac{a}{b-1} \cdot \frac{2a^2 - a - 1}{a+4} \div \frac{2a^2 + a}{b^3 - 1} = \frac{a}{b-1} \cdot \frac{(2a+1)(a-1)}{a+4} \cdot \frac{(b-1)(b^2+b+1)}{a(2a+1)}$$

$$\frac{\cancel{a}(\cancel{2a+1})(a-1)(\cancel{b-1})(b^2+b+1)}{(\cancel{b-1})(a+4)(\cancel{a})(\cancel{2a+1})} = \frac{ab^2 + ab + a - b^2 - b - 1}{a+4}$$

$$x = \frac{31}{2}$$

$$\frac{\cancel{5}(x-7) \cdot 3}{\cancel{5}} = \frac{5(\cancel{x-7}) \cdot 2}{\cancel{x-7}} = \frac{\cancel{5}(\cancel{x-7}) \cdot x}{\cancel{5}(\cancel{x-7})}$$

$$3x - 21 - 10 = x$$

$$2x = 31$$



$$\frac{1}{5}$$

$$\frac{4x + 32}{5x - 10} < 0$$



292 Apêndice A

Expanda o (multiplique os fatores do) numerador e o denominador para terminar.

4.

. Fatore as expressões, mude o sinal de divisão para

multiplicação e tome as recíprocas da fração à direita do sinal de divisão.

Escreva como uma fração e simplifique.

5.

. Fatore o denominador mais à direita para obter $5(x - 7)$, que também é o denominador comum. Assim, multiplique ambos os lados da equação por $5(x - 7)$: Divida ambos os lados por 2 para terminar; quando verificada, a solução é válida.

6. $[0,3]$. Fatore x para obter $x(x - 3) \leq 0$. Defina x e $(x - 3)$ como iguais a 0 e resolva para obter os números críticos de 0 e 3. Escolher um valor de teste em cada intervalo $(-\infty, 0]$, $[0, 3]$ e $[3, \infty)$ revela que somente os valores em $[0, 3]$ tornam a desigualdade verdadeira, então é a solução. Use pontos cheios no gráfico por causa do símbolo de desigualdade ($\leq$) 7. $(-8, 2)$. Subtraia de ambos os lados e então use o mínimo múltiplo comum de $5(x - 2)$ para combinar os termos em uma fração:

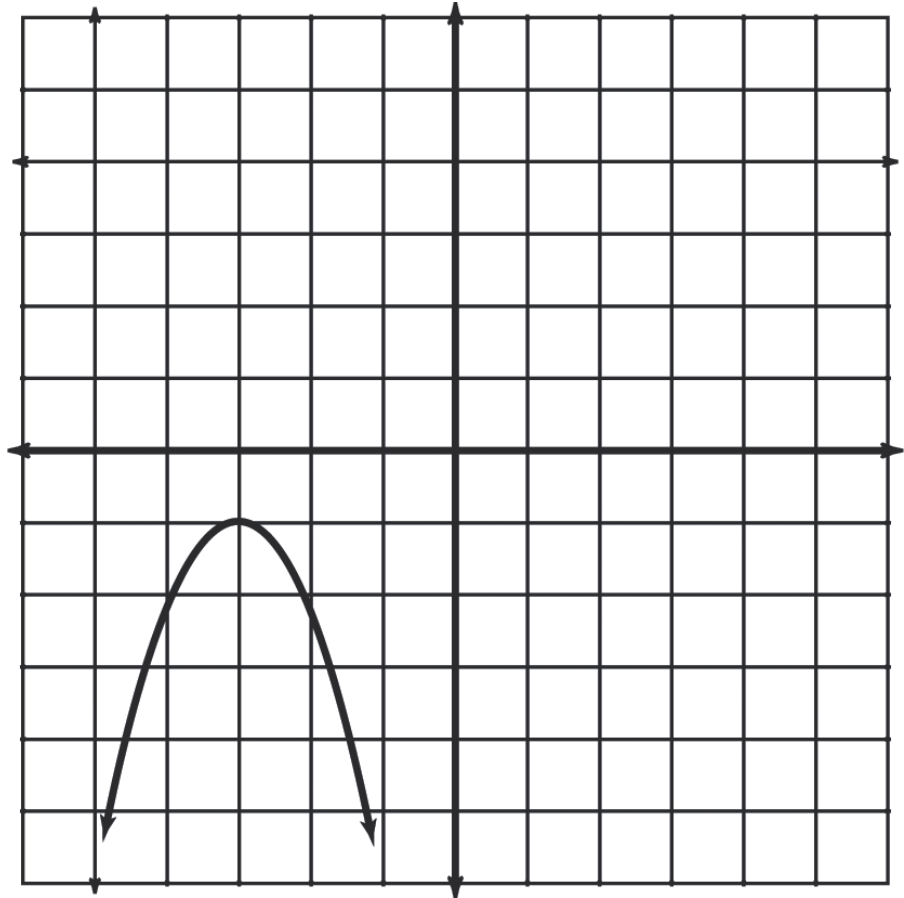
. Defina o

numerador e o denominador como iguais a 0 para obter os números críticos de $x = -8$ e $x = 2$. Use os valores de teste para obter a solução: $(-8, 2)$. Ambos os números críticos devem ser marcados no gráfico com pontos vazados.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 292

22/05/2014 14:55:08

$$\left(\frac{h}{k}\right)(w) = \frac{2w^2 - 3w - 5}{w + 1} = \frac{(2w - 5)(\cancel{w + 1})}{\cancel{w + 1}} = 2w - 5$$



$$g^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 3$$

$$y: y = \frac{x + 6}{2}$$

$$\left(y = \frac{x}{2} + \frac{6}{2}\right)$$

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

$$g(x) = \frac{(x-4)(3x+1)}{(x-4)(x-8)}$$

Soluções dos Quadros “Você Tem Problemas”

293

Capítulo 6

1. (a) $2w - 5$. Divida $h(w)$ por $k(w)$ e observe que você pode simplificar a fração fatorando o numerador:

(b) -5 . A função $(h \circ k)(-1)$ significa o mesmo que $h(k(-1))$. Como $k(-1) = 0$, substitua em $h(w)$: $h(0) = 2(0)^2 - 3(0) - 5 = -5$.

2. Três transformações são aplicadas ao gráfico de x^2 para obter o gráfico da $h(x)$: uma reflexão no eixo x (que irá virar o gráfico de cabeça para baixo), uma mudança horizontal de três unidades à esquerda e uma mudança vertical de uma unidade para baixo.

3.

. Reescreva $g(x)$ como y e troque as variáveis x e y para obter $x = 2y - 6$. Resolva para

(que pode ser reescrito dividindo a fração

em duas partes

e simplificando:

) . A resposta final deve

conter $g^{-1}(x)$ em vez de y .

4. Duas assíntotas: $x = 8$ e $y = 3$. Fatore a função primeiro:

.

Como um valor de x de 8 torna o denominador 0, mas não o numerador, ele representa uma assíntota vertical: $x = 8$. (Observe que $x = 4$ torna *ambas* as partes da fração 0, então não é uma assíntota.)
Os graus do numerador e do PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 293

22/05/2014 14:55:09

$$\left(\frac{3}{1}\right)$$

$$x = 1 + \sqrt{6}$$

$$x = 1 - \sqrt{6}$$

$$x^2-2x=5$$

$$x^2-2x+1=5+1$$

$$\sqrt{(x-1)^2}=\pm\sqrt{6}$$

$$x=1\pm\sqrt{6}$$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-5)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{24}}{2}=\frac{2}{2}\pm\frac{2\sqrt{6}}{2}=1\pm\sqrt{6}$$

$$-2,-1,-\frac{2}{3},-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},-\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},1$$

$$\frac{2}{2}$$

$$\frac{2}{6}$$

$$\frac{-1+i\sqrt{23}}{6}$$

$$\frac{-1-i\sqrt{23}}{6}$$

$$-10,-5,-\frac{10}{3},-2,-\frac{5}{3},-1,-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}$$

$$-10,-5,-\frac{10}{3},-2,-\frac{5}{3},-1,-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}$$

$$-10,-5,-\frac{10}{3},-2,-\frac{5}{3},-1,-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}$$

$$-10,-5,-\frac{10}{3},-2,-\frac{5}{3},-1,-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}$$

$$-10,-5,-\frac{10}{3},-2,-\frac{5}{3},-1,-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}$$

$$-10,-5,-\frac{10}{3},-2,-\frac{5}{3},-1,-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}$$

$$-10,-5,-\frac{10}{3},-2,-\frac{5}{3},-1,-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}$$

$$x = \frac{-1 \pm i\sqrt{23}}{6}$$

294 Apêndice A

denominador são iguais. Então, a assíntota horizontal será o quociente dos coeficientes principais e terão a equação $y = 3$.

Capítulo 7

1.

ou

. Dividir tudo por 3 (e definir a equação como igual a 0) resulta em $x^2 - 2x - 5 = 0$; você precisa de um coeficiente principal de 1

para completar o quadrado, e a equação mais simples fornecerá as mesmas soluções na fórmula quadrática.

2.

e 2. Nesta função, $a = 6$ (ignore o sinal

negativo) e $c = 2$. Embora c só tenha dois fatores (1 e 2), a tem fatores 1, 2, 3 e 6.

Liste todas as frações possíveis que pode fazer com 1 ou 2 no numerador e 1, 2, 3

ou 6 no denominador (e seus opostos) para obter a lista final. Você não precisa incluir e na lista porque suas formas simplificadas () 1 1

e 3 já estão lá.

3. -5,

e

. De acordo com a Regra dos Sinais de Descartes, $g(x)$ não tem raízes positivas, mas há três raízes negativas ou uma raiz negativa.

As raízes racionais possíveis são

(omitindo as

raízes positivas, já que a função não tem nenhuma). Somente -5 é dividido da mesma maneira, usando a divisão sintética, resultando no quociente quadrático $3x^2 + x + 2$, que não é fatorável. Descubra suas raízes usando a fórmula quadrática: .

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 294

22/05/2014 14:55:12

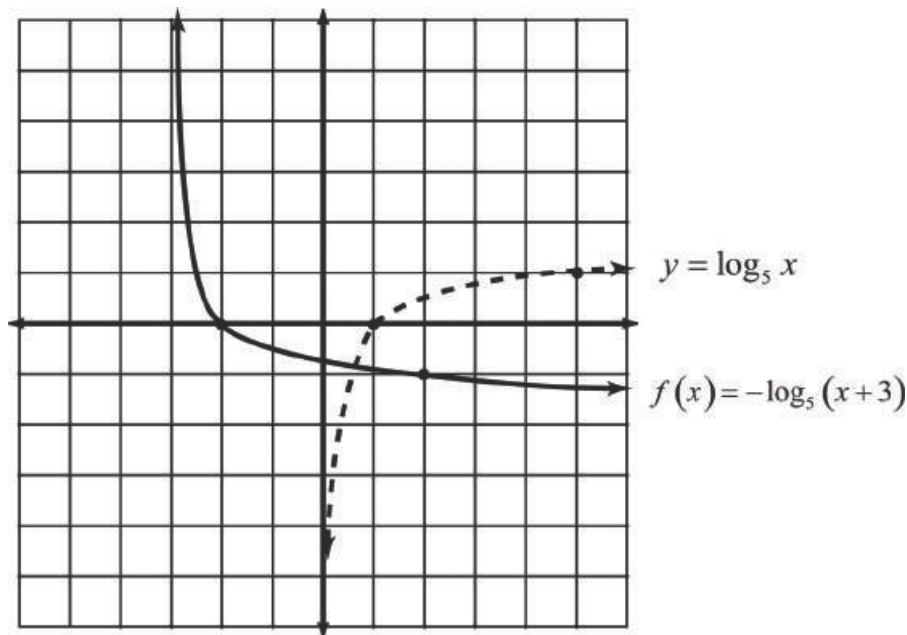
$$x = -\frac{1}{2}$$

$$16^x = \frac{1}{4}$$

$$(4^2)^x = 4^{-1}$$

$$4^{2x} = 4^{-1}$$

$$2x = -1$$



Soluções dos Quadros “Você Tem Problemas”

295

Capítulo 8

1. (a) 125. Se $5^3 = x$, então $x = 125$.

(b) 1. O único expoente que não muda o valor de sua base, como na equação $7^x = 7$, é 1.

(c)

. A versão exponencial dessa equação é

. Reescreva ambos os

lados como uma potência de 4:

2. O gráfico não transformado da $f(x) = \log x$, passará pelos pontos (1,0) e (5,1) e 5

tratará o eixo y como uma assíntota vertical. O gráfico de $f(x) = -\log(x + 3)$ é 5

diferente porque tem um valor negativo na frente da função (o que significa que você deverá refletir o gráfico no eixo x) e um “+3” dentro da função (o que significa que você deve mover todos os pontos do gráfico três unidades à *esquerda*). Na figura a seguir, o gráfico original, não transformado de $y = \log x$ 5

aparece como uma curva pontilhada, e o gráfico final de $f(x)$ é sólido.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 295

22/05/2014 14:55:13

$$\log 2 - 3 \log x - \frac{1}{2} \log y$$

$$\log 2 - \log x^3 - \log \sqrt{y}$$

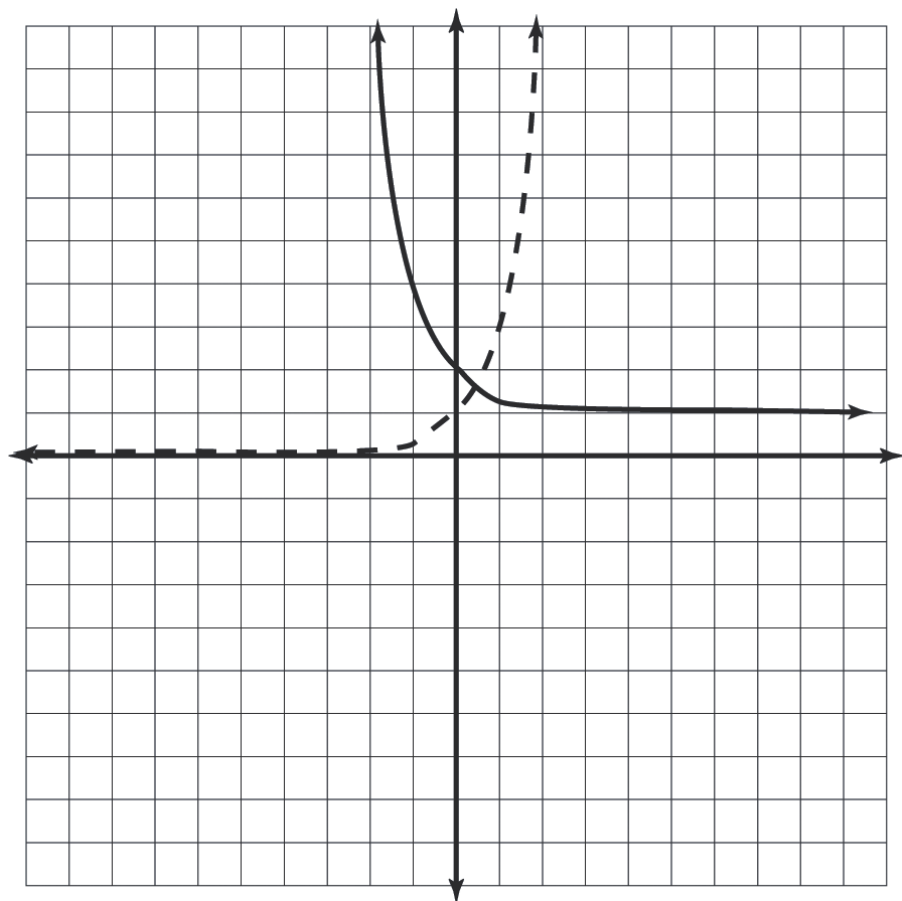
$$\log \left(x^3 \sqrt{y} \right)$$

$$\log 2 - 3 \log x - \frac{1}{2} \log y$$

$$\ln \frac{x - y}{y^3}$$

$$\ln y^3: \ln (x - y) - \ln y^3$$

$$\ln \frac{x - y}{y^3}$$



296 Apêndice A

3. 4,248. Ambos, $\log_{19} 1,2787536$

2,944438979

$\log_2 = 0,30102999$ e $\log_{19}$

$\log 2 =$

, são iguais a

0,69314718

aproximadamente 4,2479275....

4. (a)

. Reescreva a fração como um quociente de dois

logaritmos:

. O logaritmo à direita contém um produto

que você pode reescrever como a soma de dois logaritmos:

. (Como

era negativo, quando é dividido

em dois logaritmos, eles também deveriam ser negativos.) Escreva os expoentes na frente dos logaritmos:

.

(b)

. Tome cuidado! Não é possível fazer nada em $\ln (x - y)$, porque não há regra relacionada a um único logaritmo contendo subtração –

somente *dois* logaritmos que são subtraídos. Reescreva $3 \ln y$ como

. A diferença dos dois logaritmos pode ser escrita

como o logaritmo do quociente:

.

Capítulo 9

1. O gráfico não transformado de $y = 3^x$ passa pelos pontos (0,1) e (1,3) e tem uma assíntota horizontal em $y = 0$ (o eixo x). Ele aparece no desenho a seguir como uma curva pontilhada. Para obter o gráfico final de $h(x) = 3 - x + 1$, reflita $y = 3^x$ no eixo y e mova o gráfico inteiro para cima em uma unidade. O gráfico de $h(x)$ a seguir aparece como uma curva contínua.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 296

22/05/2014 14:55:16

$$\log_2 \frac{x}{3} = 8$$

$$\frac{x}{3} = 2^8$$

$$\frac{x}{3} = 256$$

$$-\frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{180}$$

$$\frac{-150}{1} \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{150\pi}{180} = -\frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{180}$$

$$\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{720\cancel{\pi}}{3\cancel{\pi}} = 240^\circ$$

$$\frac{900}{\pi}$$

$$\frac{\pi}{\pi}$$

$$180$$

$$\frac{5}{1} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{900}{\pi}$$

Soluções dos Quadros “Você Tem Problemas”

297

2. (a) $x = 768$. Reescreva o lado esquerdo como uma expressão de log único: 2

Eleve ambos os lados na potência (usando uma base de 2) e você obterá ou

. Multiplique ambos os lados por 3 para obter a resposta final.

(b) $x = 1 + \log 5$. Pegue o log de ambos os lados da equação: $\log 8 x - 1 = \log 5$.

8

8

8

8

O modo mais preciso e direto de escrever a resposta é $x = 1 + \log 5$, que 8

(de acordo com a fórmula da mudança de base) é igual a

aproximadamente 1,774.

3. 36.291 colônias. Como se passaram 32 horas entre as 8 horas de segunda-

-feira e as 16 horas de terça-feira, defina $t = 32$, $N = 9$ e $F = 113$. Substitua-os na fórmula $F = Nekt$ para calcular k :

$$113 = 9 ek \cdot 32$$

$$113$$

$$9 = e^{32k}$$

$$\ln 113$$

$$k = \approx 0,079067601293$$

$$9$$

$$32$$

Assim, exatamente t horas depois de o cientista indicar 9 colônias, o total de colônias terá crescido para F , onde $F = 9 e^{0,079067601293(32)}$. Quando ela sai às 17

horas de sexta-feira, 105 horas terão se passado desde às 8 horas de - segunda-feira, então $F = 9 e^{0,079067601293(105)} = 36.290,915$, que equivale a aproximadamente 36.291 colônias.

Capítulo 10

1. (a)

. Multiplique por

e simplifique:

.

(b) 240° . Multiplique por

e simplifique:

.

(c)

ou $286,479^\circ$. Embora não haja π nele, você ainda simplifica por

:

.

2. (a) -540° e 180° são respostas possíveis. Continue adicionando 360° a -900°

até obter um número positivo; todos os números negativos que você obter ao longo do caminho são congruos negativos válidos:

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 297

22/05/2014 14:55:18

$$-900^\circ + 360^\circ = -540^\circ + 360^\circ = -180^\circ + 360^\circ = 180^\circ$$

$$\frac{11\pi}{4}$$

$$- \frac{5\pi}{4}$$

$$\frac{8\pi}{4}$$

$$\frac{3\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{11\pi}{4}$$

$$\frac{3\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$$

$$\frac{3\pi}{7}$$

$$\frac{3\pi}{7}=\frac{6}{x}$$

$$\frac{3\pi}{7}$$

$$\frac{21\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2\pi\left(\frac{8\pi}{4}\right)$$

$$\frac{21\pi}{4}$$

$$\frac{5\pi}{4}$$

$$\frac{21\pi}{4}$$

$$\frac{5\pi}{4}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\frac{2\pi}{2} = \pi$$

298 Apêndice A

(b)

e

são respostas possíveis. Some e subtraia (que é somente 2π

escrito com um denominador equivalente):

3. 1,369. Os lados com comprimentos 6 e x são, respectivamente, os lados oposto e adjacente ao ângulo agudo ; então, use a tangente: tg

. Multiplique

ambos os lados por x e então divida ambos os lados pela tg para obter a resposta: $x = \approx 1,3694608$

6

$\text{tg } 3\text{r}7$

Certifique-se de que sua calculadora esteja no modo de radianos.

4.

. Se você subtrair

de

duas vezes, obterá um

ângulo côngruo no círculo unitário: . Assim,

e têm valores de

cosseno e seno iguais com base no ponto de intersecção do círculo unitário

.

Capítulo 11

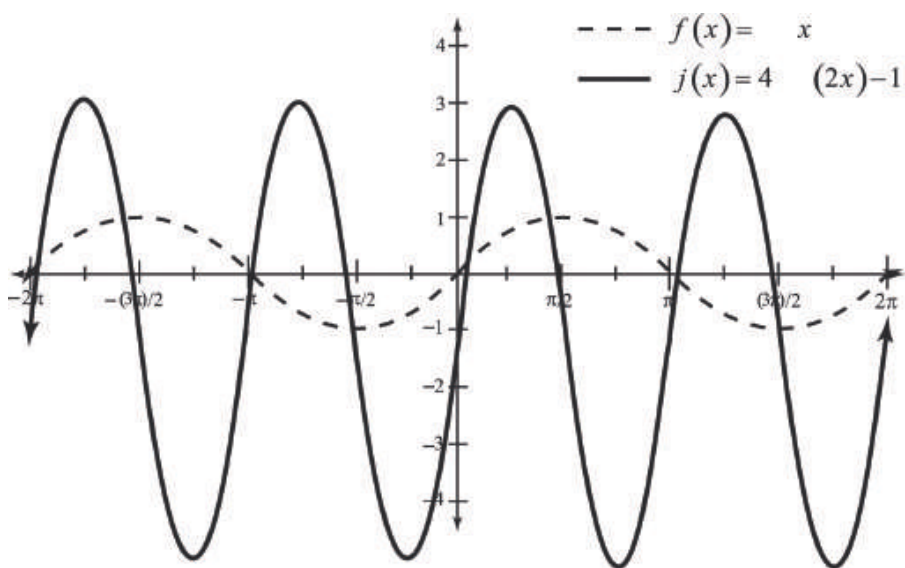
1. Período = 7; amplitude = 2,5. Escolha os pontos correspondentes nas repetições consecutivas do gráfico, como $(-6, -2)$ e $(1, -2)$; o período é

$|-6 - 1| = 7$. Para calcular a amplitude, escolha um exemplo dos pontos mais altos e baixos atingidos pela função, como $(-2, 3)$ e $(1, -2)$. Tome o valor absoluto da diferença de y , $|3 - (-2)| = 5$ e divida por 2.

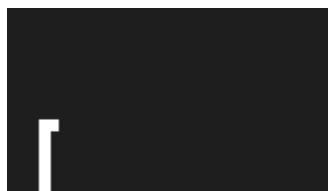
2. Três transformações mudam o $\sin x$ para $j(x)$: uma mudança no período (o gráfico da $j(x)$ será estendida em direção ao eixo y , com um período de), uma mudança de amplitude (o gráfico se estenderá de -4 para 4 em vez de -1 para 1 antes de ser movido) e uma mudança vertical do gráfico inteiro para baixo em 1 unidade. O gráfico da $j(x)$ aparece como uma curva destacada na figura a seguir; a curva pontilhada é o gráfico não transformado de $y = \sin x$.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 298

22/05/2014 14:55:20



$$\frac{1 + \cos^2 \theta}{2 \theta}$$



$$\left(\frac{1}{2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{2 \theta} \right)$$



Soluções dos Quadros “Você Tem Problemas”

299

3. A partir do círculo unitário, você obtém $\cos 5\pi$

3

1

6

2 e $\sin 5\pi$

6

2, o

que significa:

1

$\operatorname{tg} 5\pi$

2

$6 = 3$

-2

Multiplique o numerador e o denominador por 2 para simplificar: $\tan 5\pi$

1

3

6

3 ou racionalize para obter $\tan 5\pi$

6

3 . Tome as recíprocas

para obter as outras funções trigonométricas: $\sec 5\pi$

2

6

ou 2^3 ,

3

3

$\operatorname{cosec} 5\pi$

6

2 e $\cotg\theta$

3.

Capítulo 12

1.

. A expressão é a diferença dos quadrados perfeitos, então a

fatoração dá a você $(\operatorname{cosec}^2 \theta + \cot^2 \theta)(\operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta)$.
Massageie o bebê subtraindo a $\cot^2 \theta$ de ambos os lados de sua
identidade $(1 = \operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta)$

θ). Você pode substituir $\operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta$ no problema por 1:
 $(\operatorname{cosec}^2 \theta +$

$\cot^2 \theta)(1)$. Reescreva o que resta, usando o seno e o cosseno
PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 299

22/05/2014 14:55:23

$$\begin{aligned} & -\frac{\pi}{4} \\ & -\sqrt{2} \\ & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ & -\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} : \theta = \frac{5\pi}{4}$$

$$\theta = \frac{7\pi}{4}$$

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\theta = \frac{5\pi}{4}$$

$$\theta = \frac{7\pi}{4} : \frac{7\pi}{4} - 2\pi = \frac{7\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

300 Apêndice A

e some, usando os denominadores comuns. Você não pode simplificar mais o numerador porque a mamãe não pode ser massageada para gerar $1 + \cos 2\theta$.

2. O lado direito tem uma cofunção e uma identidade de sinais, então reescreva-as: $\cos x - \cos 3x = \sin 2x \cos x$. O lado esquerdo tem um máximo divisor comum do $\cos x$. Fatore-o: $\cos x(1 - \cos 2x) = \sin 2x \cos x$. De acordo com a mamãe, você pode reescrever $(1 - \cos 2x)$ como $\sin 2x$, então faça isso: $\cos x(\sin 2x) = \sin 2x \cos x$. Ambos os

lados da equação são iguais – então, está feito.

3. Reescreva o lado esquerdo usando a fórmula do ângulo duplo do seno e a fórmula da soma do seno:

$$2\sin \theta \cos \theta \sin \theta \cos 3\pi$$

$$2 + \cos \theta \sin 3\pi = -2\cos^2 \theta \sin \theta$$

$$2$$

$$2\sin \theta \cos \theta (\sin \theta \cdot 0 + \cos \theta \cdot (-1)) = -2\cos^2 \theta \sin \theta$$

$$2\sin \theta \cos \theta (-\cos \theta) = -2\cos^2 \theta \sin \theta$$

$$-2\sin \theta \cos^2 \theta = -2\cos^2 \theta \sin \theta$$

Os dois lados são iguais, de acordo com a propriedade comutativa – a ordem da multiplicação não importa.

Capítulo 13

1.

. Se um ângulo tem uma cossecante de

, seu seno é a recíproca:

, que é igual a

depois de ser racionalizada. Em outras palavras,

$\arccossec$

e $\arcsen$

têm o mesmo valor. Dois ângulos têm um seno de

e

, mas nenhum está de acordo com o intervalo restrito

de

. Deixe de lado a resposta

(o arco seno deve produzir

ângulos somente nos quadrantes I e IV) e calcule um ângulo cônico negativo para

.

2. (a) $\theta = 0$. Somente o $\cos 0 = 1$ no intervalo $[0, 2\pi)$. Note que 2π , que também tem um valor de cosseno de 1, não está incluído no intervalo por causa do parêntese.

(b) $\theta = 0$. O intervalo restrito do arco cosseno é $[0, \pi]$ e a solução exata serve.

(c) $\theta = 0 + 2k\pi$. Todos os ângulos cônicos a 0 (incluindo 2π) são soluções.

$$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$2 \cot \theta + 6 = 6$$

$$2 \cot \theta = 0$$

$$\cot \theta = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{7\pi}{6},$$

$$\frac{11\pi}{6}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$\theta = 0, \frac{\pi}{2}$$

$$1 - \cos^2 \theta = 1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$0 = -2 \cos \theta + 2 \cos^2 \theta$$

$$0 = 2 \cos \theta (-1 + \cos \theta)$$

$$\cos \theta = 0$$

$$\cos \theta = 1$$

$$\cos \theta = -1$$

$$\cos \theta = 0$$

$$\cos \theta = 1$$



$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Soluções dos Quadros “Você Tem Problemas”

3.

. Distribua o 2 e isole a $\cotg \theta$:

Isso significa que $\theta = \operatorname{arccotg} 0$. A função cotangente é igual a 0 quando seu numerador (cosseno) é igual a 0 no círculo unitário:

e

. A solução

geral são ambos os valores do círculo unitário com “ $+ 2k\pi$ ” ligado a cada um.

4.

e

. Subtraia o $\sin \theta$ de ambos os lados (para definir a

equação como igual a 0) e fatore o máximo divisor comum, $\sin \theta$: $\sin \theta$

$(2\sin^2 \theta - \sin \theta - 1) = 0$. Fatore a quadrática entre parênteses para obter $\sin \theta(2\sin \theta + 1)(\sin \theta - 1) = 0$. Defina cada fator para 0 e resolva: $\sin \theta = 0$

$$\sin \theta - 1 = 0$$

$$2\sin \theta + 1 = 0$$

$$\theta = \arcsin 0$$

$$\theta = \arcsin 1 \quad \theta = \arcsin 1$$

—

$$2$$

$$\theta = 0, \pi$$

$$\theta = \pi/2$$

$$7\pi/11, \pi$$

$$\theta = ,$$

$$6$$

$$6$$

5.

. Ambas as funções são elevadas ao quadrado. E então, você pode usar o papai para substituir qualquer uma; recomendo substituir a $\sec^2$

θ por $1 + \tan^2 \theta$: $2\tan^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$. Subtraia a $\tan^2 \theta$ de ambos os lados: $\tan^2 \theta = 1$.

Agora eleve ao quadrado ambos os lados para obter $\tan \theta = \pm 1$. (A tangente dos quatro ângulos do círculo unitário com um denominador 4 é 1 ou -1).

6.

. Subtraia o $\sin \theta$ de ambos os lados e verifique sua raiz quadrada:
 $(\cos \theta)^2 = (1 - \sin \theta)^2$. Quando você resolve o quadrado do binômio, obtém $\cos \theta = 1 - 2\sin \theta + \sin^2 \theta$. Substitua o $\cos^2 \theta$ pela expressão de mamãe massageada $1 - \sin^2 \theta$, de modo que tudo fique nos termos do seno: Defina ambos os fatores como iguais a 0. Você obterá $\sin \theta = 0$ (do qual a solução exata é $\theta = 0$) e $\sin \theta = 1$ (do qual a solução exata é) . Ambas as

soluções funcionam se você testá-las na equação original.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 301

22/05/2014 14:55:27

$$\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

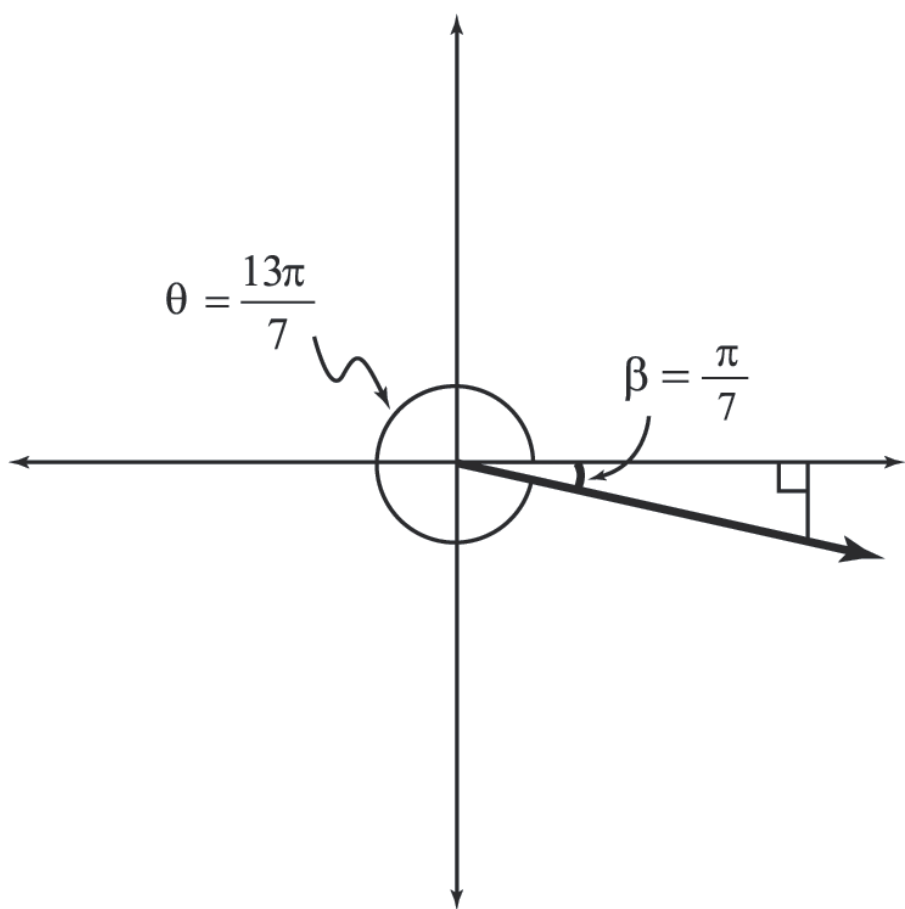
$$\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$$

$$2\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

$$2\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\pi}{7}$$

$$\theta = \frac{13\pi}{7}$$



$$2\pi - \frac{13\pi}{7} = \frac{14\pi}{7} - \frac{13\pi}{7} = \frac{\pi}{7}$$

$$\alpha = -\frac{5}{\sqrt{89}}$$

$$-\frac{5\sqrt{89}}{89}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{89}}{8}$$

$$\cos \alpha = \frac{8}{\sqrt{89}}$$

7.

. Isole o $\cos 2\theta$ subtraindo 1 e dividindo

por 2 em ambos os lados:

. Use a função do arco cosseno para

eliminar o cosseno:

. Como o coeficiente de θ é 2, você deve listar

duas vezes mais soluções usando ângulos congruos:

. Para

terminar, multiplique tudo por e vincule “ $+ 2 k\pi$ ” a cada um.

Capítulo 14

1. . Como

é um ângulo do quarto quadrante, você deve desenhar a

parte do quarto quadrante do laço de gravata usando seu lado final, conforme demonstrado pela figura a seguir:

O ângulo de referência (β) será o pequeno ângulo entre θ e o eixo x :

.

2. sen

ou

. Se a sec

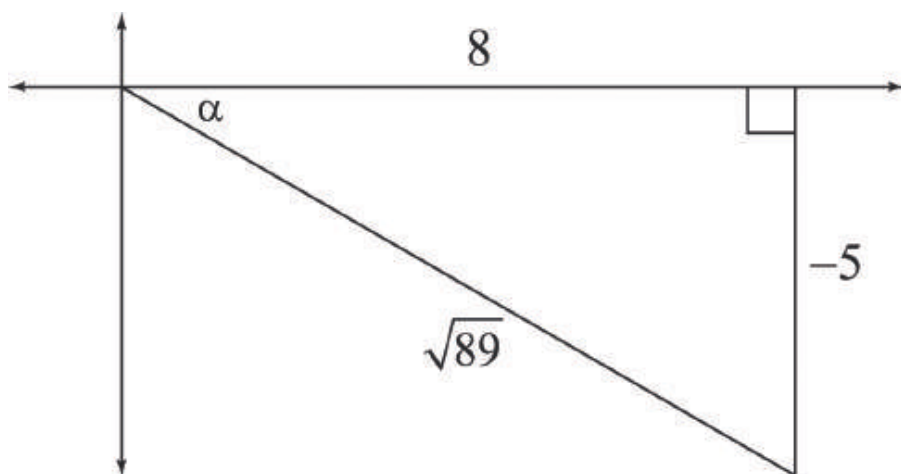
, então o

. O único

quadrante no qual o cosseno e a secante são positivos, mas a cossecante é negativa ($\operatorname{cosec} \theta < 0$) é o quadrante IV. Desenhe a parte do quarto quadrante

22/05/2014 14:55:29

$$\sqrt{89}$$



$$\alpha = -\frac{5}{\sqrt{89}}$$

$$-\frac{5\sqrt{89}}{89}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$c^2 = 5^2 + 6^2 - 2(5)(6) \cos 80^\circ$$

$$c^2 = 61 - 60(0,173648178)$$

$$\sqrt{c^2} = \sqrt{50,58110932}$$

$$c \approx 7,112$$

Soluções dos Quadros “Você Tem Problemas”

303

do laço de gravata e marque os lados. Como o cosseno é o adjacente dividido pela hipotenusa, o lado adjacente é 8 e a hipotenusa é

. (Ambos são

positivos porque o lado horizontal é deslocado *à direita* desde a origem, não *à esquerda*, e a hipotenusa nunca é negativa.) Use o Teorema de Pitágoras para obter o comprimento do lado restante de 5; deve ser negativo, porque você se desloca *para baixo* desde a origem, não para cima. Você acabará com o desenho a seguir: O seno é igual ao oposto dividido pela hipotenusa: sen

ou

.

3. 7,112. Você tem dois lados e um ângulo incluído (LAL); então, use a Lei dos Cossenos. Se você definir que $a = 5$ e $b = 6$, então $C = 80^\circ$, porque é o ângulo oposto ao lado c , cujo comprimento não é fornecido: 4. $A = 135,951^\circ$, $B = 18,717^\circ$ e $C = 25,332^\circ$. Você tem um triângulo LLL, o que significa que você precisa começar com a Lei dos Cossenos (embora a Lei dos Senos entre em cena posteriormente). Você deve usar a Lei dos Cossenos PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 303

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$(6,5)^2 = 3^2 + 4^2 - 2(3)(4) \cos A$$

$$42,25 = 25 - 24 \cos A$$

$$-0,71875 = \cos A$$

$$135,951374326^\circ \approx A$$

$$A = \frac{1}{2} ab$$

$$6\sqrt{95}$$

$$= \frac{9 + 13 + 16}{2} = 19$$

$$\text{Área} = \sqrt{19(19-9)(19-13)(19-16)}$$

$$= \sqrt{19(10)(6)(3)}$$

$$= 6\sqrt{95}$$





304 Apêndice A

para determinar o maior ângulo de um triângulo (no caso, é o obtuso), então calcule A , o ângulo oposto ao maior lado:

Agora que você conhece as medidas de um par de ângulo/lados (a e A), use a Lei dos Senos para calcular outro ângulo que esteja faltando: $\sin(135,951374326) \sin B$

=

6,5

3

$$3(0,695268608165) = 6,5 (\sin B)$$

$$0,32089320377 \approx \sin B$$

$$18,716950657^\circ \approx B$$

Subtraia A e B de 180° para obter o ângulo C .

5. 8,999. O problema descreve um triângulo LAL. Então, use a fórmula da área:

$\cdot \sin C$.

$$\text{Área} = (4)(7) \cdot \sin 40^\circ$$

12

$$\approx 14(0,6427876097)$$

$$\approx 8,999$$

6.

cm2. Comece calculado l : l

. Agora, substitua $a = 9$, $b = 13$

e $c = 16$ na Fórmula da Área de Heron:

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 304

22/05/2014 14:55:32

$$= \left(1, \frac{49}{16}\right)$$

$$a = \frac{1}{4c}$$

$$4 = \frac{1}{4c}$$

$$16c = 1$$

$$c = \frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{16}$$

$$\left(1, 3\frac{1}{16}\right)$$

$$\left(1, \frac{49}{16}\right)$$

$$\left(-\frac{3}{4}, 3\right)$$

$$x = -\frac{5}{4}$$

$$1 = \frac{1}{4c}$$

$$4c = 1$$

$$c = \frac{1}{4}$$

Soluções dos Quadros “Você Tem Problemas”

Capítulo 15

1. (a) Hipérbole. Os coeficientes de x^2 (3) e y^2 (-1) são desiguais e têm sinais opostos.

(b) Parábola. Não há termo de x^2 na equação. Se o termo elevado ao quadrado estiver ausente, a cônica é automaticamente uma parábola.

2. Vértice = (1,3); foco

. Mova a constante para o lado esquerdo da

equação e fator o coeficiente de x^2 : $y - 7 = 4(x^2 - 2x)$. Completar o quadrado significa adicionar 1 dentro dos parênteses e adicionar $4 \cdot 1 = 4$ ao lado esquerdo da equação: $y - 7 + 4 = 4(x^2 - 2x + 1)$. Agora, fator o lado direito para obter $y - 3 = 4(x - 1)^2$ e resolva y para colocar a resposta na forma padrão: $y =$

$4(x - 1)^2 + 3$. Isso significa que $h = 1$, $k = 3$ e $a = 4$.

Para descobrir o foco, é necessário saber duas coisas: a direção na qual a parábola aponta (para cima, já que a é positivo) e c . Como e você já

sabe o que é a , substitua em:

Assim, o foco será exatamente da unidade *acima* do vértice. (Se a parábola se abrisse para baixo, o foco estaria *abaixo* do vértice.) Você já descobriu h e k , então sabe que o vértice é (1,3); some c ao valor de y para obter o foco: ou .

3. $x = (y - 3)^2 - 1$; vértice = (-1,3); foco =

; diretriz é

. Subtraia 8 de

ambos os lados e então complete o quadrado, como fez quando x e y foram invertidos no Problema 2: $x - 8 + 9 = y^2 - 6y + 9$.

Simplifique o lado esquerdo e fator o lado direito para obter $x + 1 = (y - 3)^2$. Encontre x e você terá a forma padrão: $x = (y - 3)^2 - 1$.

Isso significa que $a = 1$ (não há outra constante na frente dos parênteses), $h = -1$ e $k = 3$. O vértice é $(h, k) = (-1, 3)$; use a para

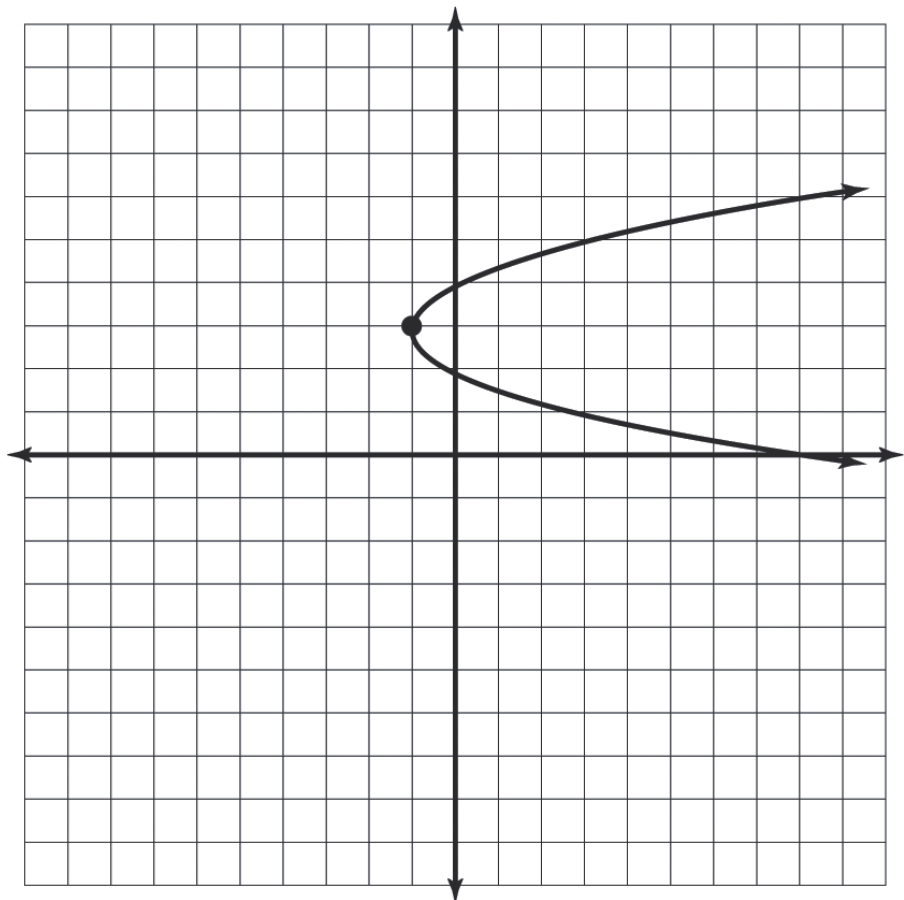
calcular c : PF_CG_TCIG_Pre-Calculus.indb 305

$$\frac{1}{4}$$

$$\left(-\frac{3}{4},3\right)$$

$$\frac{1}{4}$$

$$x=-\frac{5}{4}$$



$$\sqrt{4} = 2$$

306 Apêndice A

Como a é positivo, a parábola aponta para a direita. O foco está unidade à direita do vértice,

, e a diretriz está unidade na direção oposta,

.

4. $(x + 3)^2 + (y - 5) = 4$. Subtraia 30 de ambos os lados para movê-lo pelo sinal de igualdade e reagrupe o lado esquerdo de modo que os termos de x e y sejam separados: $(x^2 + 6x) + (y^2 - 10y) = -30$. Complete o quadrado para as quadráticas de x e y separadamente: $(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 10y + 25) = -30 + 9 + 25$. Fatore e simplifique para obter a forma padrão $(x + 3)^2 + (y$

$-5)^2 = 4$. Como $h = -3$, $k = 5$ e $r^2 =$

4, o centro do círculo é $(-3,5)$ e o raio é

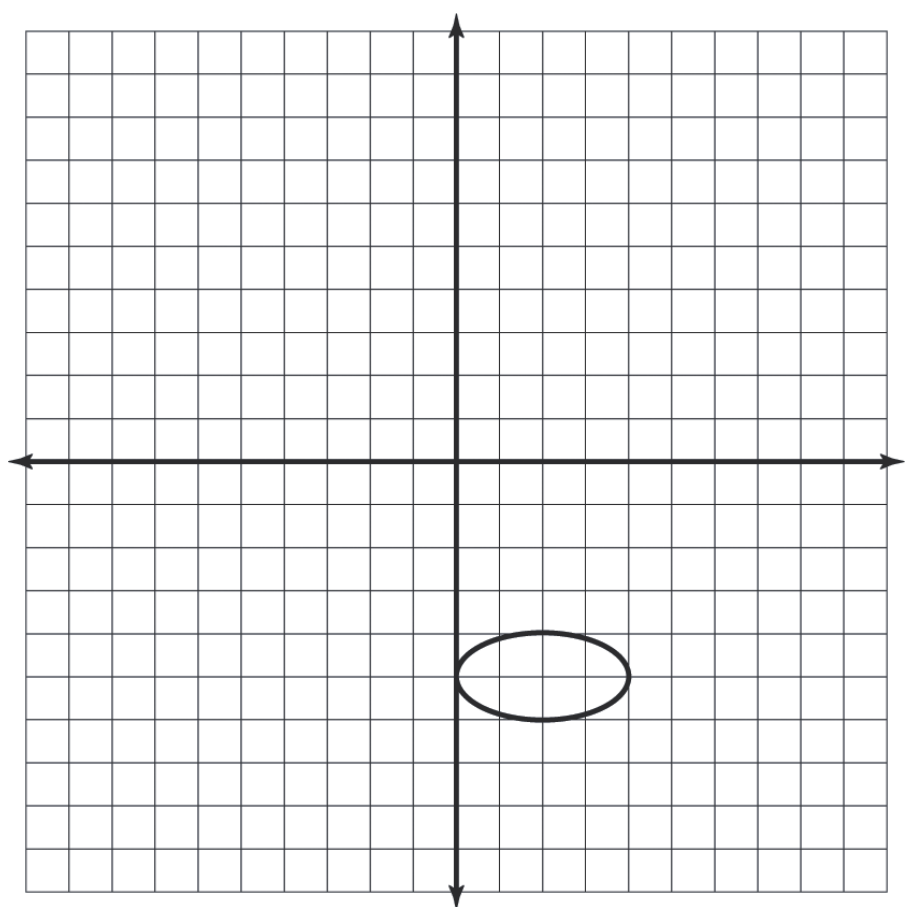
, o que resulta no gráfico a seguir:

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 306

22/05/2014 14:55:35

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+5)^2}{1} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+5)^2}{1} = 1$$



$$5x^2 + (y^2 - 3y) = -1$$

$$5x^2 + \left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) = -1 + \frac{9}{4}$$

$$5x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

Soluções dos Quadros “Você Tem Problemas”

307

Capítulo 16

1.

; comprimento do eixo maior = 4. Rearranje a equação

de modo que os termos de x e y sejam agrupados, fator 4 dos termos de y e mova 100 para o lado direito da equação: $(x^2 - 4x) + 4(y^2 + 10y) = -100$. Complete o quadrado para x e y : $(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 + 10y + 25) = -100 + 4 + 4(25)$. Fatore e simplifique: $(x - 2)^2 + 4(y + 5)^2 = 4$. Divida tudo por 4 para eliminar a constante no lado direito da equação: . Isso significa que $h = 2, k = -5$,

$a = 2$ e $b = 1$. O eixo maior é horizontal e tem o comprimento $2a = 4$. O gráfico está representado no desenho a seguir: 2. $e \approx 0,894$.

Quando você colocar essa elipse na forma padrão, ela terá algumas frações feias, mas não entre em pânico. Complete o quadrado para y para começar: PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 307

22/05/2014 14:55:36

$$\frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{\frac{5}{4}}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{5}{4}} = 1$$

$$k = \frac{3}{2}, \quad a^2 = \frac{5}{4}$$

$$b^2 = \frac{1}{4}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{25} = 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{25} = 1$$

308 Apêndice A

Divida tudo por para obter a forma padrão. Observe que pode ser simplificado dividindo-se a parte de cima e de baixo por 5, o que resulta em : Isso significa que $h = 0$ (você não teve que completar o quadrado para x), e . Calcule c usando a fórmula

:

Finalmente, divida c por a para obter a excentricidade: $e =$

$$1 \approx 0,894$$

3.

. Agrupe os termos de x e y e mova a constante para o outro lado da equação: $(25x^2 + 100x) + (-16y^2 - 32y) = 316$. Fatore 25 do grupo de x e -16 do grupo de y : $25(x^2 + 4x) - 16(y^2 + 2y) = 316$. Complete o quadrado para ambos os conjuntos de parênteses: $25(x^2 + 4x + 4) - 16(y^2 + 2y + 1) = 316$

+ **100** – **16**. (Não esqueça de multiplicar as constantes novas pelo número na frente dos parênteses de cada uma ao equilibrar o lado direito da equação; some 100 e subtraia 16, em vez de somar 4 e subtrair 1.).

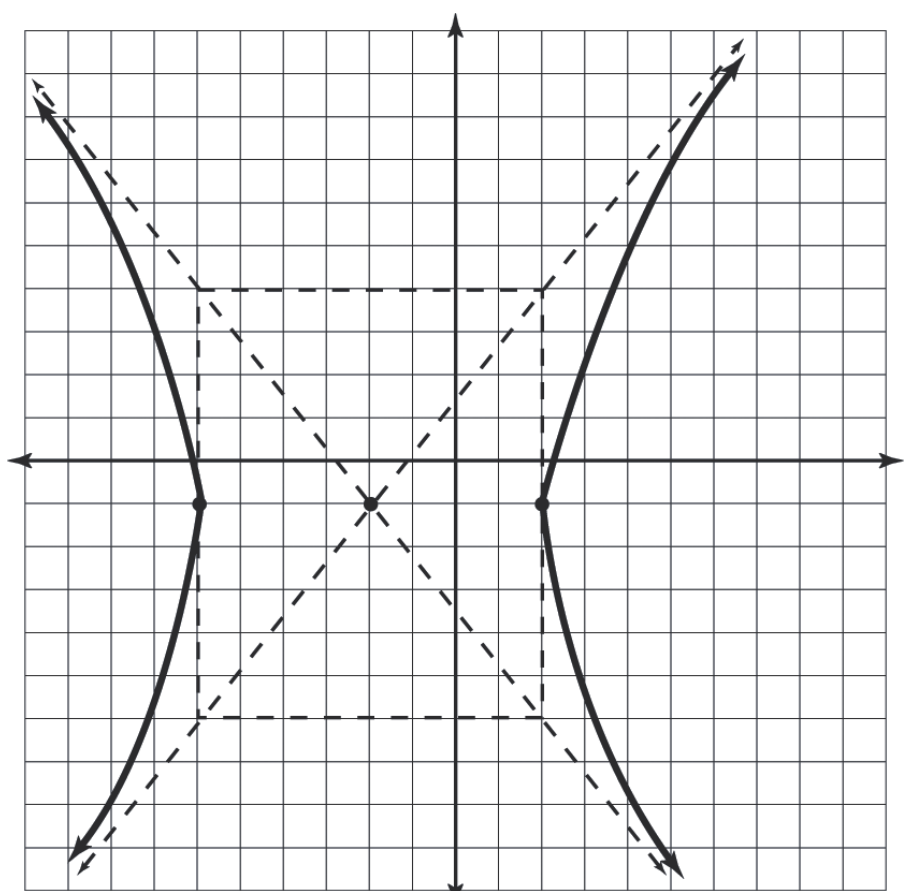
Fatore e simplifique: $25(x + 2)^2 - 16(y + 1)^2 = 400$. Divida tudo por 400 e reduza as frações

. Essa hipérbole é centralizada em $(-2, -1)$, tem

um eixo transversal horizontal com comprimento 8 (já que $a = 4$) e um eixo conjugado vertical com comprimento 10 (já que $b = 5$). Seu gráfico terá uma aparência semelhante à figura a seguir:

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 308

22/05/2014 14:55:38



$$\begin{bmatrix} -10 & -8 \\ 37 & 53 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \cdot 1 & -2 \cdot 6 \\ -2(-4) & -2 \cdot 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5(-4) & 5 \cdot 0 \\ 5 \cdot 9 & 5 \cdot 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4(-3) & -4(-1) \\ -4(4) & -4(-6) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 - 20 + 12 & -12 + 0 + 4 \\ 8 + 45 - 16 & -6 + 35 + 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -8 \\ 37 & 53 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 37 & 34 \\ -56 & -90 \\ -11 & -28 \end{bmatrix}$$

Soluções dos Quadros “Você Tem Problemas”

309

Capítulo 17

1.

. Multiplique as matrizes por suas escalares:

Some todas as entradas correspondentes:

2.

. A matriz do produto tem três linhas e duas colunas:

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 309

22/05/2014 14:55:39

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -10 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -9 & 3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(2) + (-3)(-9) + (-2)(0) & 5(7) + (-3)(3) + (-2)(-4) \\ -10(2) + 4(-9) + 8(0) & -10(7) + 4(3) + 8(-4) \\ (-1)(2) + 1(-9) + 6(0) & (-1)7 + 1(3) + 6(-4) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 3 & -2 \\ 1 & 9 & 7 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$3(9)(4) + (-2)(7)(0) + 5(1)(-1) - 0(9)(5) - (-1)(7)(3) - (4)(1)(-2)$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-12) = 12$$

$$(-1)^2 + {}^3(12) = (-1)^5(12) = -12$$

$$3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 9 & 7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 3(36 + 7) - (-8 + 5)$$

$$= 3(43) + 3$$

$$= 132$$

$$\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{25}\right)$$

310 Apêndice A

3. Certifique-se de subtrair na ordem certa: $8(2) - (5)(-1) = 16 + 5 = 21$.

4. 132. Crie a matriz

. Multiplicar as diagonais corretamente

resulta na expressão a seguir:

Depois de multiplicar, você obtém $108 + 0 - 5 - 0 + 21 + 8$, que é igual a 132.

5. $M = 12$; $C = -12$. O elemento -2 ocorre na segunda linha e na terceira coluna, 23

23

o que significa $-2 = b$. (Em outras palavras, $i = 2$ e $j = 3$.) A menor, M , é o 23

23

determinante da matriz sem a linha e a coluna que contêm -2 : O cofator, C_{23} , é igual a $(-1)^{i+j}$ vezes M : 23

6. 132. Você deve expandir a linha 3 ou a coluna 1, já que ambas contêm $a = 0$.

31

Expandirei a coluna 1:

7.

. Crie as matrizes C , X e Y :

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 310

22/05/2014 14:55:40

$$C = \begin{bmatrix} -6 & 10 \\ 1 & 15 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 15 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|C| = -90 - 10 = -100 \quad |X| = 30 - 10 = 20 \quad |Y| = -6 - 2 = -8$$

$$x = \frac{|X|}{|C|} \quad y = \frac{|Y|}{|C|}$$

$$x = \frac{20}{-100} \quad y = \frac{-8}{-100}$$

$$x = -\frac{1}{5} \quad y = \frac{2}{25}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -3 & 1 & 0 \\ -30 & -54 & -12 & 36 \\ 4 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -8 & 6 \\ 0 & 19 & -20 \end{array} \right]$$

$$B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -8 & 6 \\ -3(1)+3 & -3(-8)+(-5) & -3(6)+(-2) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -8 & 6 \\ 0 & 19 & -20 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$-\frac{1}{4}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} \left(-\frac{1}{4}\right)(-4) & \left(-\frac{1}{4}\right)(3) & \left(-\frac{1}{4}\right)(-3) \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

Soluções dos Quadros “Você Tem Problemas”

311

Calcule seus determinantes:

8. Divida $|X|$ e $|Y|$ por $|C|$ para obter x e y , respectivamente:

Capítulo 18

1. (a)

. Multiplique cada elemento da segunda linha por -6 .

(b)

. Multiplique a primeira linha por 3 e some-a na segunda linha:

2.

. Multiplique L por para transformar a em 1: 1

11

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 311

22/05/2014 14:55:42

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ -2(1)+2 & -2\left(-\frac{3}{4}\right)-1 & -2\left(\frac{3}{4}\right)+1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 2(0) & 2\left(\frac{1}{2}\right) & 2\left(-\frac{1}{2}\right) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$a_{12} = -\frac{3}{4}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{3}{4}(0)+1 & \frac{3}{4}(1)+\left(-\frac{3}{4}\right) & \frac{3}{4}(-1)+\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc} -3 & 0 \\ 3 & 2 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} (-3)\left(-\frac{1}{2}\right) & (-3)(0) & (-3)(1) & (-3)(0) \\ -\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}(0)+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}(-3)+0 & -\frac{1}{2}(0)+1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{array} \right]$$

312 Apêndice A

Agora, aplique a operação em linha $-2 \cdot L + L$ para tornar $a = 0$.

1

2

2

21

Transforme a em 1 (2 L

L):

22

2

2

Você terminou, pois a diagonal está completa.

3.

. Transforme

em 0 por meio da operação em linha,

$L L$

$L :$

4.

. Aumente a matriz com uma matriz identidade 2×2 e trabalhe na forma escalonada reduzida em linhas na matriz à esquerda. Comece com as operações em linha, $-3 L$ e

L L

L :

1

1

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 312

22/05/2014 14:55:43

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2(0) & 2\left(\frac{1}{2}\right) & 2\left(\frac{3}{2}\right) & 2(1) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Soluções dos Quadros “Você Tem Problemas”

313

Agora, aplique 2 L L ,e você obterá a forma escalonada reduzida por linhas 2

2

na matriz à esquerda:

A matriz 2×2 à direita é a inversa.

5.

. Crie uma matriz aumentada para calcular a inversa de

Depois de aplicar as operações das linhas, $-1 \cdot L$, L

L e $-2L + L$

1

1

2

1

L , obterá uma matriz inversa de

. Multiplique isso em ambos os

1

lados da equação.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 313

22/05/2014 14:55:45

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 314

22/05/2014 14:55:45



ApêndiceB

Glossário

amplitude Metade da altura de uma função periódica, calculada com a subtração dos valores de y de seus pontos mais alto e mais baixo e com a divisão de seu valor absoluto por 2.

ângulo Figura geométrica criada conectando dois raios em seus pontos finais.

ângulo agudo Mede menos de 90° (ou radianos).

ângulo de referência Um ângulo agudo cujos valores trigonométricos equivalem aos de um triângulo obtuso.

ângulo obtuso Mede mais de 90° (radianos) e menos de 180° (π radianos).

ângulo raso Mede 180° (π radianos).

ângulo reto Mede 90° (radianos).

argumento (de uma expressão logarítmica) Na expressão $\log x$, x é o a

argumento de um logaritmo.

assíntota Uma linha que representa pontos inatingíveis no gráfico de uma função racional. Normalmente é desenhada como uma linha pontilhada no plano cartesiano, mas não é tecnicamente parte do gráfico.

axioma Ver propriedade.

base (de um logaritmo) Na expressão $\log x$, a é a base do logaritmo.
 a

base (de uma expressão exponencial) Na expressão x^7 , a base é x .

centro (de uma circunferência) O ponto fixo do qual todos os pontos em uma circunferência são equidistantes.

PF_CG_TCIG_Pre-Calculus.indb 315

22/05/2014 14:55:45

316 Apêndice B

centro (de uma elipse) O ponto médio de um segmento cujos pontos finais são os focos ou vértices da elipse.

centro (de uma hipérbole) O ponto médio de um segmento cujos pontos finais são os focos ou vértices de uma hipérbole.

círculo unitário Uma circunferência centralizado na origem que tem raio 1; geralmente usado para calcular e memorizar os valores de cosseno e seno de ângulos comuns.

circunferência Conjunto de pontos no local das coordenadas que têm a mesma distância (chamada de raio) de um ponto fixo (chamado de centro).

coeficiente O número em um termo polinomial; por exemplo, o coeficiente do termo $7x^3$ é 7.

coeficiente principal O coeficiente do termo polinomial com o expoente mais alto; por exemplo, o coeficiente principal de $4x^3 + x^2 - 3x^5 + 9$ é -3.

cofator Número (correspondente ao elemento a da matriz) resultante quando a ij

menor de a é multiplicada por $(-1)^{i+j}$.

ij

cofunções Duas funções com o mesmo nome (exceto pelo fato de uma começar com o prefixo “co”); seno e cosseno são cofunções, assim como o são a secante e a cossecante.

composição de funções O processo de vincular uma função a outra, escrita $f(g(x))$ ou $(f \circ g)(x)$

côngruo Descreve ângulos que têm o mesmo lado final quando desenhados na posição padrão.

conjugado O número complexo criado ao mudar o sinal do meio de um dado número complexo. Por exemplo, o conjugado de $a + bi$ é $a - bi$ e vice-versa.

constante Um número não multiplicado por uma variável. Como o seu valor não pode variar, ela fica constante – daí o nome.

denominadores comuns Denominadores iguais de duas ou mais expressões racionais.

desigualdade composta Uma afirmação de desigualdade que tem dois limites que estão em torno da expressão com variável $a < x < b$.

determinante Número real definido para qualquer matriz quadrada.

diretriz A linha fixa usada para definir uma parábola. Cada ponto na parábola deve ser equidistante da diretriz e do foco.

dividendo No problema de divisão $a \div b$, a é o dividendo.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 316

22/05/2014 14:55:45



Glossário

317

divisão sintética Calcula o quociente do dividendo de um polinômio e um divisor binomial linear usando somente os coeficientes e as constantes das expressões.

divisor No problema de divisão $a \div b$, b é o divisor.

domínio O conjunto de entradas possíveis de uma função.

eixo conjugado O segmento que é perpendicular ao eixo transversal no centro de uma hipérbole.

eixo de simetria Linha que corta o meio de uma parábola, somente em um ponto, o vértice.

eixo maior O segmento que conecta os vértices de uma elipse, o mais longo de dois segmentos perpendiculares que passam pelo centro da elipse.

eixo menor O menor de dois segmentos perpendiculares que passam pelo centro de uma elipse.

eixo transversal Segmento cujos pontos finais são os vértices de uma hipérbole. É

perpendicular ao eixo conjugado no centro da hipérbole.

elemento Um dos números em uma matriz, geralmente escrito a_{ij} , o que significa ij

que está na linha i e na coluna j da matriz A ; é também chamada de entrada **eliminação Gaussiana** Ver forma escalonada por linhas.

elipse Conjunto de pontos no plano cartesiano cuja soma das distâncias a partir de cada ponto para dois pontos fixos (chamados focos) é constante.

entrada Ver elemento.

escalar Número multiplicado por elementos em uma matriz.

excentricidade Definido como c/a , um valor entre 0 e 1 que define a forma “oval”

de uma elipse. Quanto mais perto de 0, mais a elipse lembra uma circunferência; quanto mais perto de 1, mais pronunciada é a forma oval da elipse.

expoente Na expressão x^7 , o expoente é 7.

exponenciação O processo de mudança dos lados de uma equação em expoentes com uma base correspondente. É usada para eliminar funções logarítmicas de uma equação.

expressão com radical Expressão que contém um sinal de raiz, como

fator Se a é um fator de b , o quociente de $b \div a$ não terá um resto, e você pode dizer que a “divide igualmente” b .

filhinho A identidade trigonométrica $1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$.

PF_CG_TCIG_Pre-Calculus.indb 317

22/05/2014 14:55:45

$$\sqrt{3} \sqrt{(y-c)(y-b)(y-a)}$$

$$b = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

318 Apêndice B

foco (de uma elipse) Um dos dois pontos fixos no plano que define uma elipse. A soma das distâncias dos focos para cada ponto de uma elipse deve ser constante.

foco (de uma hipérbole) Um de dois pontos fixos no plano que define uma hipérbole. A diferença das distâncias dos focos para cada ponto em uma hipérbole deve ser constante.

foco (de uma seção cônica) Um ponto fixo que define o gráfico de uma seção cônica. Serve para um fim levemente diferente para cada cônica, mas nunca é, de fato, parte do gráfico.

forma escalonada por linhas Versão de uma matriz $m \times n$ que contém 1s na diagonal (a , a , ..., a) e todos os elementos 0 abaixo dessa diagonal. O processo 11

22

mn

de colocar uma matriz na forma escalonada reduzida por linhas é denominado *eliminação Gaussiana*.

forma escalonada reduzida por linhas Versão de uma matriz $m \times n$ contendo 1s na diagonal (a , a , ..., a) e todos os elementos 0 abaixo e acima dessa diagonal.

11

22

mn

O processo de colocar uma matriz na forma escalonada reduzida por linhas é denominado *eliminação de Gauss-Jordan*.

forma especificada Lista todas as soluções válidas para uma equação trigonométrica em um intervalo específico.

forma exata Fornece somente uma solução para uma equação trigonométrica

– a solução que cai no intervalo restrito da função trigonométrica inversa correspondente.

forma geral Lista todas as soluções possíveis para uma equação trigonométrica (levando os ângulos congruos em conta).

forma intercepto-coeficiente angular Uma equação linear resolvida para y é considerada estando na forma intercepto-coeficiente angular $y = mx + b$, onde m é a inclinação e b é o intercepto y .

forma padrão Formato específico de uma equação que garante a uniformidade das soluções. Qualquer solução correta terá exatamente a mesma aparência quando estiver na forma padrão. (Tipos diferentes de equações têm formas padrão diferentes. Por exemplo, uma equação linear na forma padrão, se for do tipo $Ax + By = C$, onde A e B são inteiros e $A > 0$.) **Fórmula da Área de Heron** Todo o triângulo com lados a, b e c tem a área

, onde

.

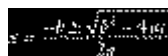
fórmula da mudança de base Ajuda a calcular valores de logaritmos que têm bases diferentes de 10 e e :

ou

.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 318

22/05/2014 14:55:46



Glossário

319

fórmula do ponto-coeficiente angular Se uma linha tem uma inclinação m e contém o ponto (a, b) , então ela tem a equação $y - b = m(x - a)$.

fórmula quadrática As soluções para a equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ são

.

função Regra matemática segundo a qual cada entrada corresponde a exatamente uma saída.

função do maior número inteiro Indicada como $\lfloor x \rfloor$, ela fornece o maior número inteiro que é menor ou igual a x .

função exponencial Funções que contêm um expoente com variável, como em $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 11^x$.

funções inversas Se $f(g(x)) = g(f(x)) = x$, então $f(x)$ e $g(x)$ são funções inversas.

gráfico restrito Pequeno segmento de um gráfico maior (normalmente periódico) que passa no teste da reta horizontal e (desse modo) tem uma função inversa válida.

grau (de um polinômio) O expoente mais alto em um polinômio.

grau (unidade de medida de ângulos) Equivalente a $1/360$ de uma circunferência e indicado pelo símbolo $^\circ$.

hipérbole Conjunto de pontos em um plano, de modo que a diferença das distâncias de cada ponto no gráfico até dois pontos fixos (denominados focos) seja constante.

hipotenusa O lado mais longo de um triângulo retângulo. Cada ângulo agudo em um triângulo retângulo tem a hipotenusa como um de seus lados.

identidade Uma equação que é verdadeira não importa qual ângulo θ é substituído nela.

identidade aditiva Zero, já que somar 0 a qualquer número a não altera o valor de a .

identidade multiplicativa Como $a \cdot 1 = a$ para qualquer número real a , 1 é a identidade multiplicativa.

índice (de uma expressão com raiz) Na expressão $\sqrt[b]{a}$, b é o índice.

inteiro Um número sem fração ou casa decimal óbvia.

intervalo O conjunto de resultados possíveis de uma função.

intervalo aberto Um intervalo em que o ponto final está incluído (a, b).



intervalo fechado Um intervalo no qual ambos os pontos finais estão incluídos:

$[a, b]$.

intervalo meio aberto Um intervalo que contém exatamente um de seus pontos finais $[a, b)$ ou $(c, d]$ (também chamado de “meio fechado”).

lado adjacente O menor dos dois segmentos que formam um ângulo agudo em um triângulo retângulo.

lado final O raio no qual um ângulo termina.

lado inicial Raio marcando o início de um ângulo; normalmente não é discernível do *lado final* de um ângulo, a menos que o ângulo esteja na *forma padrão*, caso no qual o lado inicial fica no eixo x positivo do plano cartesiano.

lado oposto Dos dois lados menores em um triângulo retângulo; esse lado não toca o vértice do ângulo que você está substituindo em uma razão trigonométrica.

Lei dos Cossenos Os lados a , b e c de um triângulo oblíquo e o ângulo A , que está no lado oposto de a , obedecem à equação: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Lei dos Senos Os lados a , b e c de um triângulo oblíquo e os ângulos opostos a eles (A , B e C , respectivamente) estão relacionados de acordo com a equação a seguir: .

logaritmo Expressão escrita $\log x$ que responde a pergunta “Em qual potência a

devo elevar a base, a , para obter x ?”; todas as equações logarítmicas $\log x = y$ podem a

ser reescritas na forma exponencial: $a^y = x$.

logaritmo comum Um logaritmo com base 10; logaritmos comuns costumam ser escritos sem uma base, assim como “ $\log x$ ” em vez de “ $\log_{10} x$ ”.

logaritmo natural Um logaritmo com base e escrito como “ $\ln x$ ” em vez de “ $\log x$ ”.

e

mamãe A identidade trigonométrica $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

matriz Um conjunto retangular de números (denominados *elementos* ou *entradas*), organizados em linhas e colunas e cercados por colchetes.

matriz aumentada Contém a matriz do coeficiente e a coluna de constantes, normalmente separadas dos coeficientes por uma linha pontilhada.

matriz identidade Dada uma matriz quadrada, B , a matriz identidade, I , tem uma ordem equivalente e contém todos os zeros, exceto na diagonal que começa no canto esquerdo superior e termina no canto direito inferior – todos esses elementos são 1.

matriz inversa A matriz A^{-1} , projetada de modo que $(A)(A^{-1})$ é igual à matriz identidade.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 320

22/05/2014 14:55:46



Glossário

321

matriz quadrada Matriz que contém o mesmo número de linhas e colunas.

máximo divisor comum O maior fator que é dividido inteiramente em cada termo de um polinômio.

meia-vida O tempo que leva para que a massa de um elemento (normalmente radioativo) diminua pela metade.

menor O determinante de uma matriz a , depois que a linha i e a coluna j são ij

removidas, denotada por M_{ij}

mínimo múltiplo comum O mínimo múltiplo comum de um grupo de expressões com raiz.

notação de intervalos Um método fácil de expressar afirmações de desigualdades que consiste em dois números-limite cercados por algumas combinações de parênteses ou colchetes, dependendo de cada limite estar incluído no intervalo.

número complexo Tem a forma $a + bi$, onde a e b são números reais. Todos os números imaginários ou reais são também automaticamente complexos.

número contável Ver número natural.

número crítico Um valor que faz uma expressão ficar igual a 0 ou tornar-se indefinida; em uma expressão com raiz, os números críticos fornecem ao numerador ou ao denominador um valor de 0.

número de Euler Uma constante irracional, indicada por e , que é aproximadamente igual a 2,718281828... É a base das funções logarítmicas e exponenciais.

número imaginário Contém i , que entende-se que tenha um valor de .

número irracional Um número que não pode ser expresso na forma de uma fração, cujo decimal de nenhum se repete nem termina.

número natural Um número no conjunto 1, 2, 3, 4, 5, ...; também denominado *número contável*.

número natural com zero Um número do conjunto 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

número real Qualquer número (racional ou irracional, positivo ou negativo) que pode ser expresso como um decimal.

oblíquo Descreve um ângulo que não mede 90° , ou um triângulo que não contém um ângulo reto.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 321

22/05/2014 14:55:46

322 Apêndice B

operações em linha Três coisas que você pode fazer com as linhas de

uma matriz (rearranjá-las, multiplicá-las por uma constante e somá-las uma à outra) que não modificarão a solução do sistema de equações que a matriz representa.

oposto O produto de um número e -1 . Por exemplo, o oposto de -7 é $(-1)(-7) = 7$.

ordem Descreve as dimensões de uma matriz, escrita $m \times n$ (onde m é o número de linhas e n é o número de colunas).

papai A identidade trigonométrica $1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta$.

parábola O conjunto de pontos no plano cartesiano que são equidistantes de um ponto fixo (denominado *foco*) e uma linha fixa (denominada *diretriz*).

periódica Uma função ou um gráfico que se repete e se repete novamente, como se estivesse em um giro infinito.

período A distância horizontal depois da qual uma função periódica se repete.

polinômio A soma (ou diferença) de pequenos agrupamentos (denominados *termos*), que são feitos de números (denominados *coeficientes*) e variáveis (normalmente elevadas em expoentes) que são multiplicados.

posição padrão (de um ângulo) Descreve um ângulo representado no plano cartesiano de modo que seu vértice esteja na origem e seu lado inicial se sobreponha ao eixo x .

potência Ver expoente.

primo Um número ou polinômio cujos únicos fatores são 1 e o número ou polinômio em si; 5 é um número primo (seus únicos fatores são 1 e 5) e $x - 3$ é um binômio primo (seus únicos fatores são $(x - 3)$ e 1).

propriedade Um fato matemático muito básico e fundamental é aceito como uma verdade, mesmo que não possa ser verificado por meio de uma prova rigorosa (também denominada *axioma*).

propriedade associativa O agrupamento de uma soma ou um produto não altera seu valor, então $(a + b) + c = a + (b + c)$ e $(ab)c = a(bc)$.

propriedade comutativa A ordem de uma soma ou produto não altera seu valor, então $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$, e $ABBA = \text{rock}$.

propriedade da simetria Você pode inverter os lados de uma equação sem afetar sua solução; em outras palavras, se $x = y$, $y = x$.

propriedade distributiva Você pode multiplicar por uma soma ou uma diferença: $a(b + c) = ab + ac$ e $a(b - c) = ab - ac$.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 322

22/05/2014 14:55:47



Glossário

323

propriedade identidade O valor de um número real é inalterado se 0 for somado a ele ou se ele for multiplicado por 1.

propriedade transitiva Se $a = b$ e $b = c$, então $a = c$.

propriedades inversas A soma de um número e seu oposto é igual a 0, e o produto de um número e seu recíproco é 1.

quadrante Descreve um ângulo cuja medida é um múltiplo de 90° ; quando representado graficamente na forma padrão, seu lado final fica no eixo x ou y .

racional Descreve algo que pode ser escrito na forma de fração (ou como decimal que termina ou se repete, se for um número).

radiano Um ângulo que corta um arco de uma circunferência cujo comprimento é igual ao raio desse círculo mede exatamente 1 radiano, aproximadamente $57,296^\circ$.

radicando Na expressão , a é o radicando.

raio A distância entre o centro de uma circunferência e qualquer ponto da circunferência.

raiz (de uma função) Os números que tornam uma função igual a zero. Se c for uma raiz da $g(x)$, então $g(c) = 0$.

raiz cúbica Uma expressão com raiz com um índice de 3, como .

raiz quadrada Uma expressão com raiz com um índice de 2; o radical sem um índice tem um índice implícito de 2, como em .

ramo Uma de duas partes da forma de um U que, juntas, formam o gráfico de uma hipérbole.

recíproco Qualquer número real diferente de zero, x , tem um recíproco constante de $\frac{1}{x}$; o recíproco de um número racional inverte a posição do numerador e o denominador desse número (o recíproco de $\frac{a}{b}$ é $\frac{b}{a}$).

Regra de Cramer Os quocientes dos determinantes de uma matriz de coeficiente (depois que as colunas são estrategicamente substituídas pelas constantes do sistema) fornecem as soluções para esse sistema.

Regra dos Sinais de Descartes O número de mudanças de sinal em uma função (ou esse número menos um múltiplo de 2) corresponde ao número ao número de raízes positivas possíveis para a função. Um número similar de mudanças de sinal na $f(-x)$ fornece o número possível de raízes negativas.

seções cônicas O conjunto de quatro figuras geométricas (parábolas, circunferências, elipses e hipérboles) que são seções transversais de um cone circular reto, quando cortados por um plano.

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 323

22/05/2014 14:55:47



324 Apêndice B

singular Descreve uma matriz que não tem uma inversa.

teorema do resto Se uma função $f(x)$ é dividida pelo binômio $(x - a)$, o resto é igual à $f(a)$.

termo Um “agrupamento” de um polinômio, normalmente o produto de um coeficiente e uma variável elevado em um expoente.

termos semelhantes Termos polinomiais com variáveis equivalentes, que podem ser somadas ou subtraídas umas de outras.

teste da raiz racional Garante que quaisquer raízes racionais da função com o coeficiente principal a e a constante c se parecerão com $\frac{p}{q}$, onde x é um fator de a e y é um fator de c .

teste do coeficiente principal O comportamento final de uma função (a direção que a função segue conforme suas extremidades esquerda e direita se direcionam ao infinito) pode ser determinado usando o coeficiente principal e o grau.

variável dependente Variável em uma função (normalmente $f(x)$), cujo valor varia com base no que é substituído na variável independente. Por exemplo, o valor da $f(x) = x^2$ *depende* do que você deseja vincular a x .

variável independente Variável em uma função cujo valor é possível controlar (normalmente, x). Qualquer variável em que você substituir valores é a variável independente.

vértice (de um ângulo) O ponto de intersecção dos dois raios que formam um ângulo.

vértice (de uma parábola) O ponto no eixo de simetria que está c unidades afastado do foco e da diretriz.



Índice

A

identidade, 7

método do arco

inversa, 7

(escrever

Adição

simétrica, 7

inversas), 173

expressões racionais,

subtração, 8

oblíquos, ângulo de

56-58

referência, 184

transitiva, 7

expressões

obtuso, 132

combinadas, 58

Ângulos

plano cartesiano,

MMC (mínimo

agudos, 132

130,131

múltiplo

áreas (triângulos

posição padrão, 131

comum), 56

oblíquos), 196-198

propriedade

funções, 70, 71

fórmula de

associativa, 6

matriz identidade, 251

Heron, 198

quadrante, 131

matrizes, 236

triângulo LAL, 197

referência

polinômios, 31

triângulo LLL, 198

laço de gravata, 184

propriedade

côngruos, 135, 136, 141

problema de

associativa, 6

de referência

revisão, 274

propriedade

laço de gravata, 184

raso, 132

comutativa, 6

problemas de

reto, 132

propriedade de

revisão, 274

triângulo retângulo

identidade, 7

equações de ângulos

funções, 137-140

Agrupamento

múltiplos, 180

(fatoração), 48

fórmula do ângulo

Assíntotas

duplo, 169

funções racionais, 80, 81

Álgebra

graus e radianos

horizontais, 81

expressões com

inclinadas, 81

radicais, 10

características

importantes,

verticais, 81

expressões

132, 133

exponenciais, 8-10

problemas de revisão,

conversões, 134

270

propriedades

lado inicial, 131

associativa, 6

Avaliação de logaritmos,

lado final, 131

comutativa, 6

102

medida, 132, 190

distributiva, 8

Axiomas, 6

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 325

22/05/2014 14:55:47



B

reais, 5

soma de cubos

polinômios, 30

perfeitos, 50

Binômios, 30

Coeficiente principal, 51, 52

fatoração de trinômios

D

C

quadráticos, 51, 52

raízes de uma função,

Decomposição (fatoração

Calculadoras, como usar

93, 94

por decomposição), 52

para avaliar razões

trigonométricas, 139

Cofatores (cálculo de

Denominadores comuns, 56

determinantes de

Cálculo de excentricidade

Desigualdade de valores

matrizes), 243

(elipses), 226

absolutos

Cofunções, 155

compostas, 26

Centro

maiores que, 27

circunferência, 216

Colunas (cálculo de

menores que, 25, 27

elipses, 220

determinante de

matrizes), 244, 245

linear

hipérboles, 227

Completando quadrado,

desigualdades

Círculo unitário

88, 89

simples, 24

funções, 140-143

notação de

pontos de

Composição de funções,

intervalos, 22

intersecção, 142

71, 72

maiores que, 27, 28

problemas de

Conjugado, 40

menores que, 25-27

revisão, 272

problemas de revisão,

Conversões graus e

269, 270

Circunferência, 204, 215

radianos, 134

quadráticas, 65, 66

centro, 216

Cossecante, representação

racionais, 67

forma padrão, 216

gráfica, 156

representação gráfica,

problema de

64-68

revisão, 272

Cosseno

desigualdade

raio, 216

círculo unitário, 140

quadráticas, 65, 66

representação gráfica,

Lei dos Cossenos, 191

desigualdades

216, 217

representação gráfica,

148

racionais, 67, 68

Classificações

triângulo retângulo, 137

Determinantes

números

atalhos, 239-241

complexos, 5

Cotangente, representação

gráfica, 155

matriz 2×2 , 240

inteiros, 4

matriz 3×3 , 241

irracionais, 5

Cubos perfeitos

método de expansão,

naturais, 4

fatoração de polinômios

242, 245

naturais com zero, 4

diferença de cubos

Diferença de cubos

racionais, 5

perfeitos, 50

perfeitos, 50

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 326

22/05/2014 14:55:48



Diferença de quadrados

visão geral, 220, 221

ângulos

perfeitos, 49

múltiplos, 180

Equações

Diretriz (parábola), 206

regra de Cramer, 246

ângulos múltiplos, 180

trigonométricas

Divisão

carentes, resolução,

básicas, 176

expressões

178, 179

equações vs

exponenciais, 9

com uma variável, 16

funções, 92

expressões racionais, 61

exponenciais, 120-123

expressando

polinômios

lineares, 17-22

soluções, 175

divisão longa, 35,36

forma padrão, 18-20

funções inversas,

divisão sintética,

forma inclinação—

172-174

37, 38

coeficiente

problemas de

angular, 18, 19

revisão, 274

Divisores, 35

forma interceptor—

Escrevendo equações

Domínio, 150

coeficiente

angular, 18, 19

lineares, 17-20

forma ponto—

forma inclinação

E

coeficiente

coeficiente angular,

angular, 18, 19

18, 19

Eixo

representação

forma ponto-coeficiente

conjugado

gráfica, 20

angular, 18, 19

(hipérbole), 228

logarítmicas, 120, 123

Expansões, cálculo de

de simetria

matrizes, 263

determinantes, 242-245

(parábolas), 207

MMC, 56

menores e

maior (elipse), 221

quadráticas

cofatores, 243

menor (elipse), 221

completando o

linhas e

transverso

quadrado, 88, 89

colunas, 244, 245

(hipérbole), 228

fatoração, 88

Expoentes fracionários,

Elipses, 204

fórmula quadrática,

expressões com

centro, 221

90-91

radicais, 11

eixo maior, 221

problemas de

revisão, 270

Expoentes negativos,

eixo menor, 221

quadrado, 88, 89

regra das expressões

excentricidade, 226

exponenciais, 10

resolução, 177

forma padrão, 222-226

racionais (eliminação

Expressões com radicais, 10

problemas de

de denominadores),

potências

revisão, 275

62-64

fracionárias, 11

representação gráfica,

resolvendo

problemas de

223-225

desencontradas e

revisão, 268

vértice, 221

carentes, 178, 179

simplificação, 11

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 327

22/05/2014 14:55:48



Expressões racionais, 60

Forma escalonada reduzida Fórmulas

adição e subtração

por linhas (eliminação

ângulo duplo, 169

combinando

Gauss-Jordan), 257-259

área de Heron, 198

expressões, 58

Forma geral

crescimento e

MMC, 56

seções cônicas, 205

decaimento, 123-126

divisão, 61

soluções, 175

quadrática, 90, 91

eliminação de

mudança de base

denominadores,

Forma padrão

(logaritmos), 108

62-64

circunferência, 216

ponto-coeficiente

multiplicação, 60

elipse

angular, 18-19

problemas de

excentricidade, 226

soma e diferença

revisão, 270

eixo maior, 221

(identidade), 169

Expressões, simplificações

eixo menor, 221

Funções

de expressões

forma padrão, 222

adição e subtração,

trigonométricas, 164, 165

representação

70, 71

gráfica, 224

assíntotas de funções

F

vértice, 221

racionais, 80, 81

visão geral, 220

horizontais, 81

Fatoração

equações lineares, 17-20

inclinadas, 81

equações

hipérbole

verticais, 81

quadráticas, 88

centro, 228

com radicais

polinômios

eixo conjugado, 228

representação

padrão de fatoraçoão,

eixo transversal, 229

gráfica, 73,74

49-50

forma padrão, 229

composição de funções,

fatoração por

vértice, 228

71, 72

agrupamento, 48

visão geral, 227

exponencial

MDC, 44-47

natural, 115

parábola

Trinômios

inversas, 71

quadráticos, 51

diretriz, 206

características, 78

eixo de simetria, 207

Foco (hipérboles), 228

criação, 80

foco, 206

maior inteiro, 74

Foco (parábolas) 206

parábola

horizontal, 212

periódicas, 273

Forma escalonada por

representação

linhas (eliminação

representação

gráfica, 146

Gaussiana), 254-257

gráfica, 207

problemas de

forma geral, 254-257

termo de x , 207

revisão, 270

uso, 259-261

termo de y , 212

quadráticas,

vértice, 207

representação

gráfica, 73, 74

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 328

22/05/2014 14:55:48



racionais

H

Intervalos

assíntotas

aberto, 23

horizontais, 81

Hipérboles, 204

fechados, 23

assíntotas

eixo conjugado, 228

meio-abertos, 23

inclinadas, 81

eixo transversal, 228

restrito, 274

assíntotas

foco, 228

verticais, 81

forma padrão, 229

seno

L

representação

círculo unitário,

gráfica, 229

140-143

Lado adjacente, 138

vértices, 228

lei dos senos, 196

visão geral, 227-229

Lado oposto (triângulos

representação

retângulos), 138

gráfica, 148-150

Hipotenusa, 138

triângulo retângulo,

Lado inicial (ângulos), 131

137-140

I

Lado final (ângulos), 131

trigonométricas,

148-158

Lei dos Cossenos, 191

Identidade

representação

Lei dos Senos, 194

gráfica, 146-157

cofunções, 161, 162

seno, 148

de sinais, 160

Linhas, como calcular

determinantes de

trigonométricas

fórmula do ângulo
matrizes (método da
inversas, 172-174
duplo, 169
expansão), 244, 245
variáveis

fórmulas da soma e
dependentes, 73
diferença, 169

Logaritmo

matrizes, 251
avaliação, 102
pitagórica, 163, 164

G

comum, 107, 108
problemas de
equilíbrio do poder
revisão, 273

Gráficos restritos, 172

logarítmico e
propriedades, 7
exponencial, 117

Graus

provando, 166, 167

mudança de base, 108

denominadores

recíproca, 162, 163

natural, 107, 108

comuns, 56

simplificação de

problemas de

medidas de ângulos

expressões, 164-166

revisão, 271

conversão para

visão geral, 160

propriedades, 110, 111

radianos, 134

representação gráfica,

características

Índices (expressões com

103-106

importantes, 132,

raiz), 11

resolução de equações,

133

Inteiros, 4, 5

120-123

MMC, *ver* MMC

função maior inteiro, 74

problemas de

MDC, 44, 46

revisão, 272

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 329

22/05/2014 14:55:49



M

problemas de

N

revisão, 269

Matrizes

Medidas de ângulos,

Notação de intervalos,

adição, 236

132, 190

desigualdades

aumentadas, 250, 251

lineares, 22

cálculo de

Menores, cálculo de

Número de termos,

determinantes

determinantes de

matrizes, 243

classificação de

atalhos, 239-241

polinômios, 30

matriz 2×2 , 240

MMC

Números

matriz 3×3 , 241

adição e subtração de

complexos, 5, 39

método de

expressões racionais,

críticos, 64

expansão, 242-245

56-58

imaginários, 39

forma escalonada por

Método da bomba

linhas

inteiros, 4

(fatoração), 52

uso, 259-261

irracionais, 5

Método da distribuição

visão geral, 254-257

naturais, 4

estendida, multiplicação

forma escalonada

naturais com zero, 4

de polinômios, 33, 34

reduzida por linhas

racionais, 5

uso, 259-261

Método do interceptor

reais, 5

visão geral, 257-259

representação gráfica

de equações

identidade, 251

lineares, 20

O

inversas, 261-263

multiplicação, 238, 239

Mínimo múltiplo comum,

Operações (matrizes), 237

Ver MMC

ordem, 237

Ordens (matrizes), 237

problemas de

Monômios, 30

revisão, 276

Multiplicação

quadrada, 237

P

expressões

regra de Cramer, 246

exponenciais, 9

Padrão de fatoração

resolução de

matriz identidade, 251

comum (polinômios)

equações, 263

por escalar

diferença de cubos

subtração, 236

(matrizes), 237

perfeitos, 50

Máximo divisor comum,

propriedade

diferença de quadrados

Ver MDC

associativa, 6

perfeitos, 49

propriedade

soma de cubos

MDC

comutativa, 6

perfeitos, 50

inteiros, 44, 45

propriedade da

polinômios, 46, 47, 50

Parábolas, 204

identidade, 7

diretriz, 206

eixo de simetria, 207

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 330

22/05/2014 14:55:49



foco, 206

Posição padrão

regra de sinais de

forma padrão, 208

(ângulos), 131

Descartes, 94-96

parábolas horizontais,

Problemas

seções cônicas, 275

212, 215

crescimento de

soluções, 276

problemas de

bactérias, 123

Teorema do resto, 98

revisão, 275

de meia-vida, 123

Teorema Fundamental

representação

da Álgebra, 93

gráfica, 210

juros compostos, 124

teste da raiz racional, 96

termo de x^2 , 207-211

Problemas de revisão, 270

teste do coeficiente

termos de y^2 , 212-215

ângulos congruos, 272

principal, 93, 94

vértice, 207

ângulos de

transformações, 270

referência, 274

Plano cartesiano (ângulos),

triângulos oblíquos, 274

130, 131

assíntotas, 270

triângulos retângulos,

circunferências, 275

137-140

Polinômios, 29

desigualdades, 270

visão geral, 97-99

adição, 31

elipses, 275

classificação, 30

Propriedades

equações lineares, 269

coeficientes

Associativa, 6

equações

principais, 51

quadráticas, 270

comutativa, 6

divisão longa, 35-37

equações

distributiva, 8

divisão sintética, 37, 38

trigonométricas, 274

identidade, 7

fatoração

equação vs função, 92

inversa, 7

agrupamento, 48

expressões

logaritmos, 110, 111

MDC, 44-47

rationais, 270

problemas de

padrões, 49, 50

funções, 270

revisão, 268

trinômios

funções periódicas, 273

simétrica, 7

quadráticos, 51,52

graus, 272

substituição, 8

multiplicação

hipérboles, 275

transitiva, 7

método da

identidades, 273

Provando identidades,

distribuição

intervalo restrito, 274

166-168

estendida, 33, 34

logaritmos, 271

técnica PEIU, 33

matrizes, 276

números complexos, 39

Q

MMC, 269

problemas de

revisão, 269

parábolas, 275

Quadrados perfeitos

subtração, 31

polinômios, 269

fatoração de polinômios

propriedades, 268

diferença de

Pontos de intersecção

radianos, 272

quadrados

(círculo unitário), 142

raízes de uma função,

perfeitos, 49

91-99, 271

Quadrante, 131

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 331

22/05/2014 14:55:49



R

funções exponenciais,

equações

114-117

quadráticas, 177

Radianos

resolução de equações,

equações

medidas de ângulos

120-123

trigonométricas

características

Representação gráfica,

básicas, 176

principais,

72-78

inversas, 172-174

132, 133

circunferências,

soluções, 175

conversão para

216, 217

graus, 134

desigualdades, 64-68

S

Radicando, 11

elipses, 222-225

Raio, 216

funções

Secantes, representação

assíntotas, 80-82

gráfica, 156

Raiz de uma função, 91

radical, 73, 74

Seções cônicas

equações vs. funções, 92

hipérboles, 229

circunferências,

problemas de

funções com radicais,

215-218

revisão, 271

73, 74

centro, 216

regra de sinais de

funções exponenciais,

Descartes, 94, 96

representação

114-117

gráfica, 216

Teorema do resto, 98

funções quadráticas,

raio, 216

Teorema fundamental

73, 74

da álgebra, 93

forma geral, 205

funções racionais, 73, 74

teste da raiz racional, 96

visão geral, 204, 205

funções

teste do coeficiente

trigonométricas

Simplificação

principal, 93, 94

cossecante, 156

Expressões com

visão geral, 97-99

cosseno, 148, 151

radical, 11

Regra de Cramer, 246

cotangente, 155

expressões de

periódicas, 146-148

identidades, 164, 165

Regra de expoentes, 8-10

secante, 156

Site com kit de ferramentas

divisão, 9

seno, 148-150

de álgebra linear (em

expoente negativo, 10

tangente, 154, 155

inglês), 255

multiplicação, 9

transformações, 151

Soluções

Regra de sinais de

parábolas, 210

expressões

Descartes, 94

transformações, 74-78

forma

Representação gráfica de

específica, 175

Resolução de equações

equilíbrio do poder

forma exata, 175

ângulos múltiplos, 180

logarítmico e

forma geral, 175

exponencial, 117

desencontradas, 178,

179

problemas de revisão,

fórmula do crescimento

276, 282

e decaimento, 123-126

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 332

22/05/2014 14:55:49



Soma de cubos perfeitos,

Transformações

Triângulos retângulos

fatoração de

funções

funções, 137, 139, 140

polinômios, 50

trigonométricas, 151

hipotenusa, 138

problemas de

lado oposto, 138

T

revisão, 270

representação

Trinômios quadráticos

Tangente

gráfica, 74-78

fatoração,

círculo unitário,

Triângulos LAL, cálculo de

coeficientes

140-143

área, 197

principais, 51, 52

representação gráfica,

por decomposição

154, 155

Triângulos LLL, cálculo de

(método da

triângulos retângulos,

área, 198

Bomba), 52

137-140

Triângulos oblíquos,

Técnica PEIU, 33

183-189

V

ângulos oblíquos,

Teorema do Resto, 98

ângulos de

Variáveis

referência, 184

Teorema Fundamental da

de termos

Álgebra, 93

cálculo de área, 196-199

semelhantes, 32

fórmula da área de

dependentes

Termos

Heron, 198

(funções), 72

classificação de

triângulos LAL, 197

equações com uma

polinômios, 30

triângulos LLL, 198

variável, 16

parábolas

funções

independentes

x^2 , 207-211

trigonométricas, 188

(funções), 73

y^2 , 212-214

Lei dos Cossenos, 191

termos semelhantes, 32

variáveis de termos

Lei dos Senos, 194

Vértice

semelhantes, 32

problemas de

elipses, 221

revisão, 274

Teste da raiz racional, 96

hipérboles, 228

triângulos retângulos,

parábolas, 207

Teste da reta horizontal,

funções, 137-140

79, 172

hipotenusa, 138

lado adjacente, 138

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 333

22/05/2014 14:55:50

PF_CG_TCIG_Pre_Calculus.indb 334

22/05/2014 14:55:50